Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Allan George de Carvalho Freitas

O Teorema da Esfera Diferenciável

Maceió, Brasil
Março de 2013

Allan George de Carvalho Freitas

O Teorema da Esfera Diferenciável

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 05 de Março de 2013 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Maceió, Brasil
Março de 2013

O Teorema da Esfera Diferenciável

Allan George de Carvalho Freitas

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 05 de Março de 2013 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva (Orientador)

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante (UFAL)

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes (IMPA)

Agradecimentos

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo demonstrar o Teorema da esfera diferenciável, isto é, que toda variedade Riemanniana compacta e estritamente 1/4-pinçada no sentido pontual é difeomorfa a uma forma espacial esférica.

Seguiremos as ideias relativas ao fluxo de Ricci de Hamilton. Primordialmente, abordaremos resultados melhorados devidos à R. Hamilton em superfícies e variedades tridimensionais. Após isto, apresentaremos a solução de S. Brendle e R. Schöen ([7]) para dimensões maiores que três.

Palavras-chave: Fluxo de Ricci; Curvatura Isotrópica Não Negativa; Teorema da Esfera Diferenciável.

Abstract

This work has as main objective to demonstrate the differentiable sphere theorem, that is, every compact Riemannian manifold and strictly 1/4-pinching in the pointwise sense is diffeomorphic to spherical space form.

We will follow the ideas for the Hamilton's Ricci flow. Primarily, discuss results improved due to R. Hamilton about surfaces and three-dimensional varieties. After that, we will present the solution of S. Brendle and R. Schoen ([7]) for dimensions greater than three.

Keywords: Ricci Flow; Nonnegative Isotropic curvature; Differentiable Sphere Theorem.

Índice

Introdução

Em 1926, H. Hopf mostrou que uma n-variedade riemanniana compacta, simplesmente conexa com curvatura seccional constante igual a 1 é necessariamente isométrica à esfera $\mathbb{S}^n$, munida de sua métrica padrão. Um sentido heurístico de continuidade, levou Hopf a conjecturar quais as variedades riemannianas cujas curvaturas seccionais estão entre 1-ε e 1 que são homeomorfas à esfera. Este ficou conhecido como o Problema pinçante de Hopf, sendo formalizado por H. Hopf e H. Rauch com a noção de curvatura pinçante:

Definição 1. *Uma variedade Riemanniana (M, g) é dita ser fracamente δ-pinçada no sentido global se as curvaturas seccionais de (M, g) satisfazem $\delta \leq K \leq 1$. Se a desigualdade é estrita, diremos que (M, g) é estritamente δ-pinçada no sentido global.*

Definição 2. *Uma variedade Riemanniana (M, g) é dita ser fracamente δ-pinçada no sentido pontual se $0 \leq \delta K(\pi_1) \leq K(\pi_2)$, para todos os pontos $p \in M$ e todos planos bidimensionais $\pi_1, \pi_1 \subset T_pM$. Se a desigualdade é estrita, diremos que (M, g) é estritamente δ-pinçada no sentido pontual.*

O Problema pinçante de Hopf foi primordialmente abordado por H. Rauch após visitar Hopf em Zürich nos anos 1948-1949. Rauch mostrou em seu artigo pioneiro ([29]) que uma variedade riemanniana simplesmente conexa que é estritamente δ-pinçada no senso global é homeomorfa à esfera, onde $\delta \approx 0,75$. A partir disto, Rauch levantou a questão de quão ótima esta constante δ poderia ser. Isto foi resolvido por M. Berger e W. Kligenberg no conhecido Teorema da Esfera:

Teorema 1 (M. Berger [4]; W. Kligenberg [21])**.** *Se (M, g) é uma n-variedade riemanniana compacta, simplesmente conexa e $1/4$-pinçada no senso global então (M, g) é homeomorfa à esfera $\mathbb{S}^n$.*

A prova clássica deste teorema baseia-se em técnicas geométricas de comparação e pode ser vista, por exemplo, no Capítulo 6 de [11]. A constante $1/4$ é ótima visto que o espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^m$ admite uma métrica cujas curvaturas seccionais pertence ao intervalo $[1, 4]$ (cf. [28], página 85).

A questão fundamental a se perguntar acerca do Teorema da Esfera é se podemos substituir no enunciado o "homeomorfa"por "difeomorfa". Isto acontece porque o homeomorfismo obtido na demonstração do Teorema da Esfera é obtido "colando"dois discos pelos bordos e uma tal construção é compatível com qualquer estrutura diferenciável distinta da estrutura usual da esfera. Além disso, existem exemplos de estruturas que são homeomorfas à esfera mas não são difeomorfas à esfera. São as chamadas esferas exóticas. Os primeiros exemplos de esferas exóticas foram construídos por J. Milnor em 1956, onde ele encontrou uma variedade suave que é homeomorfa, mas não difeomorfa à $\mathbb{S}^7$(cf. [25]).

O primeiro resultado obtido nesta direção se deve a Gromoll ([15]) e Calabi (não publicado) que provaram que uma variedade riemanniana simplesmente conexa e $\delta(n)$-pinçada no senso global é difeomorfa à $\mathbb{S}^n$, onde $\delta(n)$ depende da dimensão n da variedade e converge para 1 quando $n \to \infty$. Em 1971, M. Sugimoto, K. Shiohama e H. Karcher provaram um resultado análogo em [20] onde a constante pinçante independe da dimensão ($\delta = 0,87$). Em 1973, esta constante pinçante foi melhorada por E. Ruh em [30]($\delta = 0,80$) e, em 1974, por K. Grove, H. Karcher e E. Ruh em [16]($\delta = 0,76$). Já em 1982, E. Ruh obteve uma versão diferenciável do Teorema da Esfera sob uma condição pinçante pontual, com uma contante pinçante $\delta(n)$ que convergia para 1 quando $n \to \infty$(cf. [31]).

Em 1982, R. Hamilton introduziu novas ideias fundamentais à solução deste problema. Em seu artigo [17], Hamilton fez evoluir a métrica de uma variedade compacta (M, g_0) por uma equação de evolução

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\mathrm{Ric}_{g(t)}.$$

Esta equação de evolução ficou conhecida como o Fluxo de Ricci e se comporta como uma equação do calor não-linear. Neste mesmo artigo, Hamilton demonstrou um resultado fundamental que generaliza o Teorema da esfera diferenciável em dimensão três:

Teorema 2 (R. Hamilton [17]). *Considere (M, g) uma variedade Riemanniana compacta tridimensional com curvatura de Ricci positiva. Então M é difeomorfa a uma forma espacial esférica $\mathbb{S}^3/\Gamma$. Em particular, se M é simplesmente conexa então M é difeomorfa a $\mathbb{S}^3$.*

A demonstração deste resultado será abordado no Capítulo 4. A chave da ideia para a prova é evoluir a métrica inicial pelo fluxo de Ricci e mostrar que a evolução da métrica converge para uma métrica de curvatura seccional constante, após um rescalonamento.

Desde então, muitas pesquisas tem sido voltadas ao fluxo de Ricci e algumas conjecturas têm sido solucionadas pela aplicação dos métodos. Numas da direções de pesquisa, G.Perelman demonstrou a Conjectura de Poincaré e a Conjectura da Geometrização de Thurston.

Seguindo a técnica utilizada por Böhm e Wilking em [5] que classifica as variedades com operador de curvatura 2-positivo, S. Brendle e R. Schoen provaram o célebre Teorema da Esfera Diferenciável com a constante ótima ($\delta = 1/4$). Este resultado foi primordialmente demonstrado em [7]:

Teorema 3 (S. Brendle, R. Schöen [7]). *Considere (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 4$ e estritamente $1/4$-pinçada no senso pontual. Então M é difeomorfa a uma forma espacial esférica $\mathbb{S}^n/\Gamma$. Em particular, se M é simplesmente conexa então M é difeomorfa a $\mathbb{S}^n$.*

O objetivo maior desta dissertação é a demonstração deste teorema, bem como a maquinária necessária à sua compreensão.

No Capítulo 1, estabeleceremos notações e definições importantes para o decorrer do texto. Além disso, abordaremos resultados auxiliares às demonstrações posteriores.

No Capítulo 2, definiremos o Fluxo de Ricci e demonstraremos sua existência e unicidade em tempos pequenos para variedades compactas. Veremos como os tensores associados à métrica evoluem sob o fluxo de Ricci e abordaremos estimativas para as derivadas covariantes do tensor de curvatura sob o fluxo de Ricci. Estas estimativas tem como principal objetivo caracterizar as soluções máximas do fluxo de Ricci.

No Capítulo 3, apresentaremos resultados referentes ao caso particular do fluxo de Ricci em $\mathbb{S}^2$. Introduziremos a noção do Funcional Entropia de Hamilton para demonstrar que o fluxo de Ricci em $\mathbb{S}^2$, após um rescalonamento das métricas, converge para uma métrica de curvatura escalar constante igual a 1.

No Capítulo 4, abordaremos o Princípio do Máximo de Hamilton para o Fluxo de Ricci e discutiremos a noção de conjunto pinçante. Daremos um critério geral de convergência para o fluxo de Ricci que desempenhará um papel importante no estudo do fluxo. Aplicaremos este critério na demonstração do Teorema 2.

No Capítulo 5, introduziremos a noção de curvatura isotrópica não negativa e veremos que ela é preservada pelo fluxo de Ricci em dimensões maiores que 3. Abordaremos a construção dos cones $\hat{C}$ de Brendle e Schoen, cruciais para desenvolvimentos posteriores.

O Capítulo 6 é dedicado à demonstração do Teorema da Esfera Diferenciável. Descreveremos uma construção de cones invariantes de Böhm e Wilking que será aplicada ao cone $\hat{C}$ como forma de utilizar o critério geral do Capítulo 4.

Capítulo 1

Preliminares e alguns resultados auxiliares

Neste capítulo, fixaremos notações para o restante do trabalho e abordaremos alguns resultados e definições suporte para o decorrer do texto. O bom entendimento da dissertação requer conhecimentos básicos de variedades riemannianas, fibrados vetoriais e tensores.

1.1 Prelúdio à Geometria Riemanniana

Considere (M, g) uma variedade riemanniana. Definimos uma conexão livre de torção e simétrica, a conexão de Levi-Civita D, da variedade (M, g) pela fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} 2g(D_X Y, Z) &= X(g(X, Y)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ &\quad + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X), \end{aligned}$$

onde X, Y, Z são campos de vetores em M.

A conexão de Levi-Civita estende-se naturalmente para tensores. Assim, se T é um tensor de ordem k e X é um campo de vetores, $D_X T$ é um tensor de ordem k definido por

$$D_X T(Y_1, \ldots, Y_k) = X(T(Y_1, \ldots, Y_k)) - \sum_{i=1}^{k} T(Y_1, \ldots, D_X Y_i, \ldots, Y_k).$$

Além disso, a derivada covariante de T é o tensor DT de ordem $k + 1$ definido por

$$DT(Y_1, \ldots, Y_{k+1}) = D_{Y_{k+1}} T(Y_1, \ldots, Y_k).$$

A segunda derivada covariante de T é definida por

$$D^2_{X,Y} T = D_X D_Y T - D_{D_X Y} T.$$

Indutivamente, pode-se definir a m-ésima derivada covariante de um tensor.

O Laplaciano de um campo tensor T é dado por

$$\Delta T = \sum_{k=1}^{n} D^2_{e_k,e_k} T,$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal em M.
O tensor de curvatura de Riemann de (M, g) é definido por

$$R(X, Y, Z, W) = g(D_Y D_X Z - D_X D_Y Z + D_{[X,Y]} Z, W).$$

onde X, Y, Z, W são campos de vetores em M.

Observação 1.1. *Obtemos uma forma para comutar derivadas covariantes, observando que*

$$\begin{aligned}
D^2_{X,Y} Z - D^2_{Y,X} Z &= D_X D_Y Z - D_{D_X Y} Z - D_Y D_X Z + D_{D_Y X} Z \\
&= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{D_X Y - D_Y X} Z \\
&= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z \\
&= -\sum_{k=1}^{n} R(X, Y, Z, e_k) e_k.
\end{aligned}$$

,

para todos X, Y, Z, W, T campos em M.
Raciocinado da mesma forma, se S é um $(0, 4)$-tensor podemos ver que

$$\begin{aligned}
&(D^2_{X,Y} S)(U, V, Z, W) - (D^2_{Y,X} S)(U, V, Z, W) \\
&= \sum_{k=1}^{n} R(X, Y, U, e_k) S(e_k, V, W, Z) + \sum_{k=1}^{n} R(X, Y, V, e_k) S(U, e_k, W, Z) \\
&+ \sum_{k=1}^{n} R(X, Y, W, e_k) S(U, V, e_k, Z) + \sum_{k=1}^{n} R(X, Y, Z, e_k) S(U, V, W, e_k)
\end{aligned}$$

□

Dados quaisquer campos X, Y, Z, W, T em M, o tensor de curvatura de Riemann satisfaz às relações de simetria

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = R(Z, W, X, Y), \tag{1.1}$$

e as identidades

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0. \tag{1.2}$$

e

$$D_T R(X,Y,Z,W) + D_Z R(X,Y,W,T) + D_W R(X,Y,T,Z) = 0 \tag{1.3}$$

As demonstrações de (1.1), (1.2) e (1.3) podem ser encontrads no Capítulo 2 de [28]. A identidade (1.2) é conhecida como a 1^a Identidade de Bianchi e (1.3) é conhecida como a 2^a Identidade de Bianchi.

Em vista de (1.1), podemos ver R como uma forma bilinear simétrica no espaço das duas-formas. Basta definir, para cada ponto $p \in M$, o operador de curvatura $R : \wedge^2 T_pM \times \wedge^2 T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$R(X \wedge Y, Z \wedge W) = R(X,Y,Z,W),$$

para todos campos X, Y, Z, W em T_pM.

Definição 1.1. *Diremos que (M, g) tem operador de curvatura não negativo se $R(\varphi, \varphi) \geq 0$ para todos os pontos $p \in M$ e todas duas-formas $\varphi \in \wedge^2 T_pM$.*

Definição 1.2. *Diremos que (M, g) tem operador de curvatura duas vezes não negativo se $R(\varphi, \varphi) + R(\psi, \psi) \geq 0$ para todos os pontos $p \in M$ e todas duas-formas $\varphi, \psi \in \wedge^2 T_pM$ tais que $|\varphi|^2 = |\psi|^2$ e $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$.*

Dado $p \in M$ e um plano bidimensional $\pi \subset T_pM$, definimos a curvatura seccional de π por

$$K(\pi) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2},$$

onde $\{X, Y\}$ é uma base de π. A definição de curvatura seccional independe da base $\{X, Y\}$ escolhida.

Fixado $p \in M$, considere $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. A curvaura de Ricci de (M, g) é a forma bilinear simétrica

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{k=1}^{n} R(X, e_k, Y, e_k),$$

e a curvatura escalar é definida por

$$\mathrm{scal} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_k, e_k).$$

Por fim, o tensor traço livre de Ricci de (M, g) é definido por

$$\overset{o}{\mathrm{Ric}}\,(X,Y) = \mathrm{Ric}(X,Y) - \frac{1}{n}\mathrm{scal} \cdot g(X,Y).$$

A proposição que se segue é consequência da 2^a Identidade de Bianchi.

Proposição 1.1. *Temos que*

$$\sum_{k=1}^{n} (D_{e_k} Ric)(X, e_k) = \frac{1}{2} X(scal) \tag{1.4}$$

e

$$\sum_{k=1}^{n}(D_{e_k} \overset{o}{Ric})(X,e_k) = \frac{n-2}{2n}X(scal) \tag{1.5}$$

Demonstração. Utilizando a definição de scal e a 2^a Identidade de Bianchi, teremos que

$$\begin{aligned} X(\text{scal}) &= \sum_{k,l=1}^{n}(D_X R)(e_k,e_l,e_k,e_l) \\ &= \sum_{k,l=1}^{n}(D_{e_k}R)(X,e_l,e_k,e_l) + \sum_{k,l=1}^{n}(D_{e_l}R)(e_k,X,e_k,e_l) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(D_{e_k}\text{Ric})(X,e_k) + \sum_{l=1}^{n}(D_{e_l}\text{Ric})(X,e_l). \end{aligned}$$

Disto, concluímos (1.4). Utilizando a definição de $\overset{o}{\text{Ric}}$ e (1.4), conclui-se (1.5).

□

O importante resultado que se segue foi descoberto por M. Berger:

Lema 1.1 (Lema de Berger). *Considere (M,g) uma variedade riemanniana compacta e $p \in M$ um ponto arbitrário. Suponha que $\underline{\kappa} \leq K(\pi) \leq \overline{\kappa}$, para todos planos bidimensionais $\pi \subset T_pM$. Então*

$$R(e_1,e_2,e_3,e_2) \leq \frac{1}{2}(\overline{\kappa} - \underline{\kappa}),$$

e

$$R(e_1,e_2,e_3,e_4) \leq \frac{2}{3}(\overline{\kappa} - \underline{\kappa}),$$

para todos conjuntos ortonormais $\{e_1,e_2,e_3,e_4\} \subset T_pM$.

Demonstração. Seguem das simetrias do tensor de curvatura e da hipótese do Lema que

$$\begin{aligned} R(e_1,e_2,e_3,e_2) &= \frac{1}{2}\left(R\left(\frac{e_1+e_3}{\sqrt{2}},e_2,\frac{e_1+e_3}{\sqrt{2}},e_2\right) - R\left(\frac{e_1-e_3}{\sqrt{2}},e_2,\frac{e_1-e_3}{\sqrt{2}},e_2\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}(\overline{\kappa} - \underline{\kappa}), \end{aligned}$$

para todos conjuntos ortonormais $\{e_1,e_2,e_3\} \subset T_pM$.

Utilizando novamente as simetrias do tensor curvatura, a 2^a Identidade de Bianchi e a 1^a desigualde que obtivemos, teremos que

$$\begin{aligned} R(e_1,e_2,e_3,e_4) &= \frac{1}{3}\left(R\left(\frac{e_1+e_3}{\sqrt{2}},e_2,\frac{e_1+e_3}{\sqrt{2}},e_4\right) - R\left(\frac{e_1-e_3}{\sqrt{2}},e_2,\frac{e_1-e_3}{\sqrt{2}},e_4\right)\right) \\ &\quad +\frac{1}{3}\left(R\left(e_1,\frac{e_2+e_3}{\sqrt{2}},\frac{e_2+e_3}{\sqrt{2}},e_4\right) - R\left(e_1,\frac{e_2-e_3}{\sqrt{2}},\frac{e_2-e_3}{\sqrt{2}},e_4\right)\right) \\ &\leq \frac{2}{3}(\overline{\kappa}-\underline{\kappa}), \end{aligned}$$

para todos conjuntos ortonormais $\{e_1,e_2,e_3,e_4\} \subset T_pM$.

□

Corolário 1.1. *Considere (M,g) uma variedade riemanniana compacta e $p \in M$ um ponto arbitrário. Suponha que $\underline{\kappa} \leq K(\pi) \leq \overline{\kappa}$, para todos planos bidimensionais $\pi \subset T_pM$. Então existem constantes $C_1, C_2 > 0$, que dependem apenas da dimensão, tais que*

$$\sup_M |R|^2 \leq C_1(\overline{\kappa}-\underline{\kappa})^2 + C_2\overline{\kappa}^2$$

Os teoremas de comparação de volume, terão um papel importante no desenvolvimento da teoria. A seguir, enunciaremos dois teoremas importantes neste sentido e indicaremos referências para suas demonstrações.

Teorema 1.1 (P. Günther(1960); R.L. Bishop (1964))**.** *Suponha que as curvatura seccionais de M são menores ou iguais a δ. Então, para todo $x \in M$, temos que*

$$V(x,r) \geq V_\delta(r),$$

para todos $r \geq \min\left\{inj(x), \pi/\sqrt{\delta}\right\}$, com a igualdade para algum r fixado ocorrendo se, e somente se, $B(x,r)$ é isométrica ao disco de raio r no espaço de curvatura escalar constante igual a δ.

Demonstração.

Consultar [10], página 129.

□

Teorema 1.2 (O. Bonnet(1855); S. B. Myers (1941))**.** *Considere M uma variedade riemanniana e $\gamma : [0,\beta] \longrightarrow M$ uma geodésica de velocidade unitária tal que existe $\kappa > 0$ para o qual*

$$Ric(\gamma',\gamma') \geq (n-1)\kappa > 0,$$

em $\gamma([0,\beta])$. Se $\beta \geq \pi/\sqrt{\kappa}$, então $\gamma([0,\beta])$ contém um ponto conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ.

Portanto, se M é uma variedade riemanniana completa, de dimensão $n \geq 2$, tal que existe $\kappa > 0$ para o qual

$$Ric(\xi, \xi) \geq (n-1)\kappa|\xi|^2 > 0,$$

para todo $\xi \in TM$, então M é compacta com diâmetro $\leq \pi/\sqrt{\kappa}$.

Demonstração.
Consultar [10], página 84.

□

1.2 Convergência de Métricas

Considere (M, g_0) como sendo uma variedade riemanniana compacta e $g(t)$, $t \in [0, T)$, uma família a 1-parâmetro de métricas em M tal que $g(0) = g_0$ e

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = \omega(t).$$

Considere $u_0 : [0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$u_0(t) = \sup_M |\omega(t)|_{g(t)}.$$

Nesta seção, encontraremos condições necessárias para que as métricas $g(t)$ convirjam para uma métrica suave quando $t \to T$.

Lema 1.2. *Se $\int_0^T u_0(t)dt = K < \infty$, então existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\frac{1}{c}|v|^2_{g(0)} \leq |v|^2_{g(t)} \leq c|v|^2_{g(0)},$$

para todos pontos $(p, t) \in M \times [0, T)$ e todos vetores $v \in T_pM$.
Em outras palavras, as métricas $g(t)$ são uniformemente equivalentes.

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} \left|\frac{d}{dt}|v|^2_{g(t)}\right| &= \left|\frac{d}{dt} g(t)(v, v)\right| \\ &\leq |\omega(t)|_{g(t)}|v|^2_{g(t)} \\ &\leq u_0(t)|v|^2_{g(t)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left|\frac{d}{dt}\log(|v|^2_{g(t)})\right| \leq u_0(t),$$

de onde concluímos que

$$\left|\log\left(\frac{|v|^2_{g(t)}}{|v|^2_{g(0)}}\right)\right| = \int_0^t \frac{d}{d\tau}\log(|v|^2_{g(\tau)})d\tau \tag{1.6}$$

$$\leq \int_0^t u_0(\tau)d\tau \leq K \tag{1.7}$$

Portanto,

$$\mathrm{e}^{-K} \leq \frac{|v|^2_{g(t)}}{|v|^2_{g(0)}} \leq \mathrm{e}^{K},$$

para todo $t \in [0, T)$. Disto, concluímos a demonstração.

□

Lema 1.3. *Considere (M, g) uma variedade riemanniana, D a conexão de Levi-Civita associada à g e $\tilde{D}$ uma conexão simétrica em (M, g). Então, temos que*

$$D_X Y = \tilde{D}_X Y + \Gamma(X, Y),$$

onde X, Y são campos em M e Γ é definida por

$$2g(\Gamma(X, Y), Z) = (\tilde{D}_X g)(Y, Z) + (\tilde{D}_Y g)(X, Z) - (\tilde{D}_Z g)(X, Y).$$

Demonstração.

Por definição, temos que

$$(\tilde{D}_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\tilde{D}_X Y, Z) - g(Y, \tilde{D}_X Z). \tag{1.8}$$

Segue das simetrias de D e $\tilde{D}$ que

$$[X, Y] = D_X Y - D_Y X = \tilde{D}_X Y - \tilde{D}_Y X. \tag{1.9}$$

Portanto, fazendo uso da Fórmula de Kozsul, de (1.8) e (1.9), concluiremos que

$$\begin{aligned}
2g(D_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\
&\quad + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) \\
&= X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\
&\quad + g(\tilde{D}_X Y, Z) - g(\tilde{D}_Y X, Z) - g(\tilde{D}_X Z, Y) \\
&\quad + g(\tilde{D}_Z X, Y) - g(\tilde{D}_Y Z, X) + g(\tilde{D}_Z Y, X) \\
&= (\tilde{D}_X g)(Y, Z) + (\tilde{D}_Y g)(X, Z) - (\tilde{D}_Z g)(X, Y) + 2g(\tilde{D}_X Y, Z) \\
&= 2g(\Gamma(X, Y) + \tilde{D}_X Y, Z).
\end{aligned}$$

Como Z é um campo arbitrário, conclui-se nossa demonstração.

$\square$

Daqui por diante usaremos a seguinte notação: dados dois tensores A, B, denotaremos por $A * B$ qualquer expressão bilinear em A e B. Além disso, se $I = (i_1, \ldots, i_q)$ é um multi-índice, denotaremos $|I| = i_1 + \ldots + i_k$ e $D^I = D^{i_1} \ldots D^{i_k}$.

Lema 1.4. *Considere D a conexão de Levi-Civita de $g(t)$ e $\tilde{D}$ uma conexão simétrica em M. Considere $I = (i_1, \ldots, i_q)$ um multi-índice. Então*

$$D^m\omega(t) - \tilde{D}^m\omega(t) = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{|I|=m-l} \tilde{D}^I g(t) * \tilde{D}^l\omega(t).$$

Demonstração. A demonstração deste fato será feita por indução sobre m.

Se $m = 1$, a assertiva segue do Lema 1.3.

Suponhamos, agora, que

$$D^{m-1}\omega(t) - \tilde{D}^{m-1}\omega(t) = \sum_{l=0}^{m-2} \sum_{|I|=m-l-1} \tilde{D}^I g(t) * \tilde{D}^l\omega(t).$$

Aplicando D em ambos os lados e usando a multilinearidade, temos que

$$D^m\omega(t) - D\tilde{D}^{m-1}\omega(t) = \sum_{l=0}^{m-2} \sum_{|I|=m-l-1} D\tilde{D}^{i_1}g(t) * \ldots * D\tilde{D}^{i_q}g(t)\tilde{D}^l\omega(t) + \tilde{D}^I g(t) * D\tilde{D}^l\omega(t). \tag{1.10}$$

Utilizando o Lema 1.3, teremos que

$$D\tilde{D}^l\omega(t) = \tilde{D}\tilde{D}^l\omega(t) + \tilde{D}g(t) * \tilde{D}^l\omega(t).$$

Substituindo em (1.10), concluiremos que

$$\begin{aligned}
& D^m\omega(t) - \tilde{D}\omega(t) - \tilde{D}g(t) * \tilde{D}^{m-1}\omega(t) \\
= & \sum_{l=1}^{m-2} \sum_{|I|=m-l-1} \tilde{D}^{i_1+1}g(t) * \ldots * \tilde{D}^{i_q}g(t)\tilde{D}^l\omega(t) \\
& + \sum_{l=1}^{m-2} \sum_{|I|=m-l-1} \tilde{D}g(t)\tilde{D}^{i_1} * \ldots * \tilde{D}^{i_q}g(t)\tilde{D}^l\omega(t) \\
& + \sum_{l=1}^{m-2} \sum_{|I|=m-l-1} \tilde{D}^I g(t)(\tilde{D}^{l+1}\omega(t) + \tilde{D}g(t)\tilde{D}\omega(t))
\end{aligned}$$

Portanto, rearrumando os termos através das propriedades da operação $*$, concluiremos que

$$D^m\omega(t) - \tilde{D}^m\omega(t) = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{|I|=m-l} \tilde{D}^I g(t) * \tilde{D}^l\omega(t).$$

□

A partir de agora, consideraremos as sequências

$$u_m(t) = \sup_M |D^m\omega(t)|_{g(t)} \quad \text{e} \quad \tilde{u}_m(t) = \sup_M |\tilde{D}^m\omega(t)|_{g(0)}.$$

Observação 1.2. *Da definição de $g(t)$ e $\omega(t)$, segue que*

$$g(t) = g_0 + \int_0^t \omega(\tau)d\tau,$$

de onde obtemos

$$\sup_M |\tilde{D}^m g(t)|_{g(0)} \leq \int_0^t \tilde{u}_m(\tau)d\tau,$$

para todo $t \in [0, T)$.

O Lema a seguir será de crucial importância para a demonstração do Teorema de convergência para métricas.

Lema 1.5. *Se $\int_0^T u_m(\tau)d\tau < \infty$, para todo $m = 0, 1, 2, \ldots$, então $\int_0^T \tilde{u}_m(\tau)d\tau < \infty$, para todo $m = 1, 2, \ldots$*

Demonstração. Novamente, a demonstração será feita por indução sobre m.

Se $m = 1$, a assertiva segue do Lema 1.3.

Supondo a afirmação válida para $l \in \{1, \ldots, m-1\}$, $m \geq 1$, segue da Observação 1.2 que

$$\sup_{t\in[0,T)} \sup_M |D^l g(t)|_{g(0)} \leq \int_0^T \tilde{u}_l(\tau)d\tau \tag{1.11}$$

para todo $l \in \{1, \ldots, m-1\}$. Utilizando o Lema 1.4 e a continuidade da operação $*$, garantimos a existência de uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|\tilde{D}^m\omega(t)|_{g(0)} - |D^m\omega(t)|_{g(0)} \leq C_1 \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{|I|=m-l} |\tilde{D}^{i_1} g(t)|_{g(0)} \ldots |\tilde{D}^{i_q} g(t)|_{g(0)} |\tilde{D}^l\omega(t)|_{g(0)}.$$

Pondo $K = \max_{0\leq l\leq m-1} \left\{\int_0^T \tilde{u}_l(\tau)d\tau\right\} \geq 0$, teremos que

$$
\begin{aligned}
|\tilde{D}^m\omega(t)|_{g(0)} &\leq |D^m\omega(t)|_{g(0)} + C_1\sum_{l=0}^{m-1} K^{m-l}|\tilde{D}^l\omega(t)|_{g(0)} + C_1|\tilde{D}^m g(t)|_{g(o)}|\omega(t)|_{g(0)} \\
&\leq |D^m\omega(t)|_{g(0)} + C_2\sum_{l=1}^{m-1} |\tilde{D}^l\omega(t)|_{g(0)} + C_2(1+|\tilde{D}^m g(t)|_{g(0)})|\omega(t)|_{g(0)},
\end{aligned}
$$

onde $C_2 > 0$ depende apena da dimensão e de m. Utilizando o Lema 1.2, temos que existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$
|\tilde{D}^m\omega(t)|_{g(0)} \leq C_3|D^m\omega(t)|_{g(t)} + C_2\sum_{l=1}^{m-1} |\tilde{D}^l\omega(t)|_{g(0)} + C_2C_3(1+|\tilde{D}^m g(t)|_{g(0)})|\omega(t)|_{g(t)}.
$$

Daí, utilizando as definições de u_m e $\tilde{u}_m$, e a desigualdade (1.11), teremos

$$
\tilde{u}_m(t) \leq C_4\left[u_m(t) + \sum_{l=1}^{m-1}\tilde{u}_l(t) + \left(1+\int_0^t \tilde{u}_m(\tau)d\tau\right)u_0(t)\right],
$$

donde

$$
\frac{\tilde{u}_m(t)}{1+\int_0^t \tilde{u}_m(\tau)d\tau} \leq C_4\left(u_m(t) + \sum_{l=1}^{m-1}\tilde{u}_l(t) + u_0(t)\right) = U(t).
$$

Desta forma,

$$
\frac{d}{dt}\log\left(1+\int_0^t \tilde{u}_m(\tau)d\tau\right) \leq U(t), \tag{1.12}
$$

para todo $t \in [0,T)$.

Segue da hipótese do lema que $\int_0^t u_0(\tau)d\tau < \infty$ e $\int_0^t u_m(\tau)d\tau < \infty$. Além disso, por hipótese de indução temos que $\int_0^t \tilde{u}_l(\tau)d\tau < \infty$ para todo $l \in \{1,\ldots,m-1\}$. Assim,

$$
\int_0^t U(\tau)d\tau < \infty. \tag{1.13}
$$

Portanto, integrando a expressão (1.12) e utilizando a observação (1.13), concluiremos que

$$
\int_0^t \tilde{u}_m(\tau)d\tau < \infty,
$$

o que completa nossa demonstração.

□

O resultado que se segue, também conhecido como Teorema de Convergência para métricas, é de crucial importância para o decorrer do texto:

Teorema 1.3. *Se $\int_0^T u_m(t)dt < \infty$, para todo $m \geq 0$ inteiro, então, quando $t \to T$, as métricas $g(t)$ convergem em C^∞ para uma métrica suave $\bar{g}$.*

Demonstração. Utilizando o Lema 1.5, vemos que

$$\sup_{t\in[0,T)} \left(\sup_M \|\tilde{D}^m g\|_{g(0)} \right) \leq \int_0^T \tilde{u}_m(\tau)d\tau < \infty,$$

para todo $m \geq 1$. Assim, se definimos localmente $\bar{g}_{ij}(p) = \lim_{t\to T} g_{ij}(t)(p)$, a desigualdade acima implica que as métricas $g(t)$ convergem em C^∞ para uma forma bilinear simétrica $\bar{g}$. Além do mais, utilizando o Lema 1.2, temos que

$$\bar{g}(X, X) = \lim_{t\to T} \|X\|_{g(t)} \geq C\|X\|^2_{g(0)} > 0,$$

para todo campo $X \neq 0$. Daí concluímos que $\bar{g}$ é definida positiva e finalizamos a demonstração.

□

1.3 Um pouco de E.D.P.

Nesta seção, abordaremos dois teoremas importantes de E.D.P. que serão cruciais no desenvolvimento de nosso texto: o Teorema de Existência e Unicidade para equações parabólicas e o Princípio do Máximo escalar para equações parabólicas.

Inicialmente, considere E como sendo um fibrado vetorial sobre uma variedade riemanniana compacta M. Seja $N : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ um operador de ordem 2 dado em coordenadas locais por $N(u) = N(u, \partial u, \partial^2 u)$. Aqui, $C^\infty(E)$, representa o espaço das seções suaves sobre o fibrado E.

A linearização de N em u_0 é o operador linear

$$L = DN(u_0) : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E),$$

definido por

$$L(v) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(u_0 + tv).$$

Localmente, podemos representar, para um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $L : C^\infty(U, \mathbb{R}^m) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ por

$$(Lu)^\alpha(x) = a^{ij}_{\alpha\beta}(x)\partial_i\partial_j u^\beta(x) + b^i_{\alpha\beta}(x)\partial_i u^\beta(x) + c_{\alpha\beta}(x)u^\beta(x),$$

onde $i, j = 1, \ldots, n$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, m$, $x \in U$ e estamos utilizando a notação de Einstein. Além disso, $a^{ij}_{\alpha\beta}$, $b^i_{\alpha\beta}$ e $c_{\alpha\beta}$ são funções diferenciáveis em U. Isto caracteriza os operadores lineares de ordem 2.

Com auxílio das duas próximas definições daremos uma condição necessária para a existência e unicidade de soluções para operadores de segunda ordem.

Definição 1.3. *Dado $\xi \in \mathbb{R}^n$, o símbolo principal de um operador linear de ordem 2 L na direção ξ, em x, é o endomorfismo linear $\sigma_\xi(L,x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definido por*

$$[\sigma_\xi(L,x)(u)]^\alpha = a^{ij}_{\alpha\beta} u^\beta \xi_i \xi_j,$$

onde $i, j = 1, \ldots, n$ e $\alpha, \beta = 1, \ldots, m$.

Definição 1.4. *O operador diferencial L será dito elítico se, para todo $x \in U$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\langle \sigma_\xi(L,x)(u), u \rangle \geq c|\xi|^2|u|^2,$$

para todo $u \in \mathbb{R}^m$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Diremos que a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} u = N(u)$$

é parabólica em $u_0 \in C^\infty(E)$ se toda expressão local de L de $DN(u_0)$ é elítica.

O importante teorema a seguir garante a existência e unicidade de soluções para equações parabólicas. Sua demonstração pode ser encontrada em [34]. Este teorema também se aplica em equações sobre fibrados vetoriais. Na terminologia do teorema, se M é uma variedade compacta e sem bordo então qualquer condição inicial f suave em M satisfaz as hipóteses do teorema.

Teorema 1.4 (Teorema de Existência e Unicidade para equações parabólicas)**.** *Sejam M uma variedade sem bordo com $dim M = m$ e $L : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ um operador diferencial não-linear de ordem 2. Se $f \in H^s(M)$ com $s > \frac{m}{2} + 2$ e L é parabólico, então o problema:*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t) & = & Lu \\ u(0) & = & f, \end{cases}$$

tem uma única solução $u \in C^0([0,T), H^s(M)) \cap C^\infty((0,T) \times M)$. Além disso, u existe tão longo quanto $\|u(t)\|_{C^{2+r}} < \infty$, dado $r < \infty$.

O princípio do máximo é uma propriedade crucial para as soluções de algumas equações diferenciais elípticas e parabólicas. Aqui apresentaremos apenas algumas.

Seja $g(t)$, $t \in [0,T)$, uma família a 1-parâmetro de métricas riemannianas numa variedade compacta M. Considere um operador diferencial L da forma

$$Lu = \frac{\partial}{\partial t} u - \Delta_{g(t)} u - \langle X(t), \nabla u \rangle_{g(t)} - F(u,t), \tag{1.14}$$

onde $X(t)$, $t \in [0,T)$, é um campo de vetores que podem depender do tempo e $F : \mathbb{R} \times [0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz. O princípio do máximo que veremos a seguir será de crucial importância para o desenvolvimento do texto. Sua demonstração pode ser vista, por exemplo, na página 117 de [2].

Teorema 1.5 (Princípio do Máximo Escalar)**.** *Suponha que L é um operador como em (1.14) e $u : M \times [0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 que satisfaz $Lu \geq 0$. Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $u(x,0) \geq c$ para todo $x \in M$. Então, se $\psi(t)$, $t \in [0,T_1)$, é a solução da E.D.O.*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi(t) & = & F(\psi(t),t) \\ \psi(0) & = & c, \end{cases}$$

temos que

$$u(x,t) \geq \psi(t),$$

para todo $x \in M$, e para todo $t \in [0,T) \cap [0,T_1)$.

1.4 Alguns Resultados de Álgebra Linear Complexa

Considere V como sendo um espaço vetorial de dimensão finita e $V^{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$ a complexificação de V. Assuma que V está munido de um produto interno $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ e estenda naturalmente g à forma bilinear simétrica $g^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$. Para enxugar as notações, faremos $g = g^{\mathbb{C}}$ sendo o significado de cada expressão entendido pelo contexto.

Lema 1.6. *Temos que*

$$|g(z,z)g(w,w) - g(z,w)^2| \leq g(z,\bar{z})g(w,\bar{w}) - |g(z,\bar{w})|^2,$$

para todos vetores $z, w \in V^{\mathbb{C}}$.

Demonstração. Se fizermos $z \wedge w = \varphi + i\psi$, com $\varphi, \psi \in \wedge^2 V$, teremos que

$$\begin{aligned} g(z,\bar{z})g(w,\bar{w}) - |g(z,\bar{w})|^2 &= g(z \wedge w, \bar{z} \wedge \bar{w}) \\ &= g(\varphi + i\psi, \varphi - i\psi) \\ &= |\varphi|^2 + |\psi|^2. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g(z,z)g(w,w) - g(z,w)^2 &= g(z \wedge w, z \wedge w) \\ &= g(\varphi + i\psi, \varphi + i\psi) \\ &= |\varphi|^2 - |\psi|^2 + 2ig(\varphi,\psi). \end{aligned}$$

Unindo os fatos anteriores e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluiremos que

$$\begin{aligned} |g(z,z)g(w,w) - g(z,w)^2|^2 &= (|\varphi|^2 - |\psi|^2)^2 + 4g(\varphi,\psi)^2 \\ &\leq (|\varphi|^2 - |\psi|^2)^2 + 4|\varphi|^2|\psi|^2 \\ &= (|\varphi| + |\psi|^2)^2 \\ &= (g(z,\bar{z})g(w,\bar{w}) - |g(z,\bar{w})|^2)^2. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.7. *Considere $\sigma \subset V^{\mathbb{C}}$ um 2-plano complexo. Então, existem vetores $z, w \in \sigma$ tais que $g(z,\bar{z}) = g(w,\bar{w}) = 1$ e $g(z,\bar{w}) = g(z,w) = 0$.*

Demonstração. Considere $\{\zeta, \eta\}$ uma base ortonormal de σ. Desta forma, temos que $g(\zeta,\bar{\zeta}) = g(\eta,\bar{\eta}) = 1$ e $g(\zeta,\bar{\eta}) = 0$. Se $g(\zeta,\eta) = 0$, não há nada que demonstrar.

Supondo $g(\zeta,\eta) \neq 0$, segue do Teorema do Valor Intermediário, que existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{2i\delta}g(\zeta,\zeta) - \mathrm{e}^{-2i\delta}g(\eta,\eta)}{g(\zeta,\eta)}\right) = 0$$

Fixado este δ, podemos encontrar $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\tan(2\theta) = \frac{2}{\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{2i\delta}g(\zeta,\zeta) - \mathrm{e}^{-2i\delta}g(\eta,\eta)}{g(\zeta,\eta)}\right)}.$$

Desta forma,

$$\frac{1}{2}\mathrm{sen}(2\theta)\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{2i\delta}g(\zeta,\zeta) - \mathrm{e}^{-2i\delta}g(\eta,\eta)}{g(\zeta,\eta)}\right) = \cos(2\theta).$$

Assim, se definimos

$$z = \cos(\theta)\mathrm{e}^{i\delta}\zeta + \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{e}^{-i\delta}\eta$$

e

$$w = -\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{e}^{i\delta}\zeta + \cos(\theta)\mathrm{e}^{-i\delta}\eta,$$

observa-se facilmente que $g(z,\bar{z}) = g(w,\bar{w}) = 1$ e $g(z,\bar{w}) = 0$. Além do mais,

$$g(z,w) = \cos(2\theta)g(\zeta,\eta) - \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2\theta)(\mathrm{e}^{2i\delta}g(\zeta,\zeta) - \mathrm{e}^{-2i\delta}g(\eta,\eta)) = 0$$

$\square$

Proposição 1.2. *Assuma que $\dim_{\mathbb{R}}(V) \geq 4$ e que $\sigma \subset V^{\mathbb{C}}$ é um 2-plano complexo. Então existe um conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ e $\lambda, \mu \in [0,1]$ tais que $e_1 + i\mu e_2 \in \sigma$ e $e_3 + i\mu e_4 \in \sigma$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.7, podemos encontrar vetores $z, w \in \sigma$ tais que $g(z,\bar{z}) = g(w,\bar{w}) = 1$ e $g(z,\bar{w}) = g(z,w) = 0$. Além do mais, é possível encontrar um número $a \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{2ia}g(z,z)) = 0$ e $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{2ia}g(z,z)) \geq 0$. Similarmente, podemos encontrar $b \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{2ib}g(w,w) = 0$ e $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{2ib}g(w,w)) \geq 0$.

Se definimos os vetores $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ por

$$\mathrm{e}^{ia}z = v_1 + iv_2 \quad \text{e} \quad \mathrm{e}^{ib}w = v_3 + iv_4,$$

podemos ver que

$$g(v_1 + iv_2, v_3 - iv_4) = \mathrm{e}^{i(a-b)} g(z, \bar{w}) = 0$$

e

$$g(v_1 + iv_2, v_3 + iv_4) = \mathrm{e}^{i(a+b)} g(z, w) = 0.$$

Além disso, como

$$g(\mathrm{e}^{ia} z, \mathrm{e}^{ia} z) = g(v_1, v_1) + 2ig(v_1, v_2) - g(v_2, v_2), \tag{1.16}$$

teremos que

$$g(v_1, v_2) = \frac{1}{2} \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{2ia} g(z, z)) = 0, \tag{1.17}$$

e, similarmente,

$$g(v_3, v_4) = \frac{1}{2} \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{2ib} g(w, w)) = 0. \tag{1.18}$$

Ainda mais, (1.16), também implica que

$$|v_1|^2 - |v_2|^2 = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{2ia} g(z, z)) \geq 0 \tag{1.19}$$

e

$$|v_3|^2 - |v_4|^2 = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{2ib} g(w, w)) \geq 0 \tag{1.20}$$

Como

$$g(\mathrm{e}^{ia} z, \mathrm{e}^{-ia} \bar{z}) = g(v_1, v_1) + g(v_2, v_2),$$

segue que

$$|v_1|^2 + |v_2|^2 = g(z, \bar{z}) = 1, \tag{1.21}$$

e, similarmente,

$$|v_3|^2 + |v_4|^2 = g(w, \bar{w}) = 1. \tag{1.22}$$

Segue de (1.17), (1.18), (1.19), (1.20), (1.21) e (1.22), que existe um conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ e $\lambda, \mu \in [0, 1]$ tais que

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} e_1, \quad v_1 = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} e_2,$$
$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_3, \quad v_4 = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} e_4.$$

Isto implica que

$$e_1 + i\mu e_2 = \sqrt{1+\mu^2}(v_1 + iv_2) = \sqrt{1+\mu^2}\mathrm{e}^{ia}\zeta \in \sigma$$

e

$$e_3 + i\lambda e_4 = \sqrt{1+\lambda^2}(v_3 + iv_4) = \sqrt{1+\lambda^2}\mathrm{e}^{ib}\eta \in \sigma.$$

□

Corolário 1.2. *Assuma que* $\dim_{\mathbb{R}}(V) \geq 4$. *Além disso, considere dois vetores L.I.* $\zeta, \eta \in V^{\mathbb{C}}$ *satisfazendo* $g(\zeta,\zeta)g(\eta,\eta) - g(\zeta,\eta)^2 = 0$ *e* $\sigma \subset V^{\mathbb{C}}$ *o plano complexo gerado por* ζ *e* η. *Então, existe um conjunto ortonormal* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ *e um número real* $\lambda \in [0,1]$ *tais que* $e_1 + ie_2 \in \sigma$ *e* $e_3 + i\lambda e_4 \in \sigma$.

Demonstração. Pela Proposição 1.2, existe um conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ e $\lambda, \mu \in [0,1]$ tais que $e_1 + i\mu e_2 \in \sigma$ e $e_3 + i\mu e_4 \in \sigma$. Fazendo $z = e_1 + i\mu e_2 \in \sigma$ e $w = e_3 + i\lambda e_4 \in \sigma$, e observando, da hipótese, que $g(z,z)g(w,w) - g(z,w)^2 = 0$, temos que

$$0 = g(z,z)g(w,w) - g(z,w)^2 = (1-\lambda^2)(1-\mu^2),$$

donde concluímos que $\lambda = 1$ ou $\mu = 1$.

□

Corolário 1.3. *Assuma que* $\dim_{\mathbb{R}}(V) \geq 4$. *Além disso, considere dois vetores L.I.* $\zeta, \eta \in V^{\mathbb{C}}$ *satisfazendo* $g(\zeta,\zeta) = g(\eta,\eta) = g(\zeta,\eta)^2 = 0$ *e* $\sigma \subset V^{\mathbb{C}}$ *o plano complexo gerado por* ζ *e* η. *Então, existe um conjunto ortonormal* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ *tal que* $e_1 + ie_2 \in \sigma$ *e* $e_3 + ie_4 \in \sigma$.

Demonstração. Pela Proposição 1.2, existe um conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ e $\lambda, \mu \in [0,1]$ tais que $e_1 + i\mu e_2 \in \sigma$ e $e_3 + i\mu e_4 \in \sigma$. Fazendo $z = e_1 + i\mu e_2 \in \sigma$ e $w = e_3 + i\lambda e_4 \in \sigma$, e observando, da hipótese, que $g(z,z) = g(w,w) = g(w, w = 0)$ temos que $\lambda = \mu = 1$

□

Capítulo 2

O Fluxo de Ricci de Hamilton

No artigo pioneiro de 1982 ([17]), R. Hamilton, baseado nas ideias de Eells e Sampson ([14]), introduziu uma equação de evolução não linear que se comportava como uma equação do calor não linear. Esta equação ficou conhecida como o Fluxo de Ricci:

Definição 2.1. *Considere uma variedade riemanniana compacta M e $g(t)$, $t \in [0, T)$, uma família a 1-parâmetro de métricas riemannianas em M. Diremos que $g(t)$ é uma solução do Fluxo de Ricci se*

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_{g(t)}.$$

Este capítulo será dedicado ao estudo das propriedades fundamentais do fluxo de Ricci. Primordialmente, demonstraremos a existência e unicidade do fluxo de Ricci utilizando uma técnica conhecida como o truque de DeTurck ([13]). A seguir, veremos como os tensores associados à métrica evoluem sob o fluxo de Ricci. Por fim, abordaremos algumas estimativas devidas a W. X. Shi ([33]) para as derivadas covariantes do tensor de curvatura que tem como principal objetivo caracterizar as soluções máximas do fluxo de Ricci.

2.1 Existência e Unicidade do Fluxo de Ricci em tempos pequenos

No artigo [17], Hamilton demonstrou a existência e unicidade do fluxo de Ricci. É possível ver que o fluxo de Ricci é uma equação não parabólica, o que não permite aplicar os resultados conhecidos sobre equações parabólicas(cf. **Seção 1.3**). Contudo, Hamilton contornou este problema utilizando uma técnica apurada que envolvia o Teorema da função de Inversa de Nash e Moser.

No que segue esta seção, daremos uma demonstração consideravelmente mais simples que àquela que foi primordialmente dada por Hamilton e que se baseia nas ideias de D. DeTurck ([13]). A ideia de DeTurck foi considerar uma nova equação de evolução da métrica que fosse parabólica, e de forma que a partir das soluções desta nova equação fosse possível obter uma solução do fluxo de Ricci. A nova equação foi denominada de Fluxo de Ricci-DeTurck.

Começaremos lembrando uma definição.

Definição 2.2. *Dada $f:(M,g)\longrightarrow(N,h)$ uma aplicação suave entre duas variedades riemannianas (M,g) e (N,h), definimos o campo laplaciano de f por*

$$\begin{aligned}\Delta_{g,h}f &= g^{ij}(D_{\partial_i}df)(\partial_j)\\ &= g^{ij}(D^h_{df(\partial_i)})df(\partial_j)-df(D^g_{\partial i}\partial j).\end{aligned}$$

Definiremos agora a nova equação de DeTurck:

Definição 2.3. *Considere M uma variedade compacta e h uma métrica riemanniana em M. Uma família a 1-parâmetro $\tilde g(t)$, $t\in[0,T)$, é dita ser uma solução do fluxo de Ricci-de Turck se*

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde g(t)=-2Ric_{\tilde g(t)}-\mathscr{L}_{\xi_t}\tilde g(t),$$

onde $\xi_t=\Delta_{\tilde g(t),h}id$.

Proposição 2.1. *Considere M uma variedade compacta e g_0 uma métrica riemanniana em M. Então existem $T>0$ e uma solução $\tilde g(t)$, $t\in[0,T)$, do fluxo de Ricci-de Turck tal que $\tilde g(0)=g_0$. Além do mais, $\tilde g(t)$ é única.*

Demonstração.

Inicialmente, escrevemos o tensor de Ricci de $\tilde g$ em coordenadas locais

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_{\tilde g} &= \mathrm{Ric}_{\tilde g}(\partial j,\partial l)dx^j\otimes dx^l\\ &= \tilde g^{ik}R(\partial_j,\partial_i,\partial_l,\partial_k)dx^j\otimes dx^l\\ &= [\tilde g^{ik}\cdot\tilde g(D_{\partial_i}(\Gamma^m_{jl}\partial_m)-D_{\partial_j}(\Gamma^m_{il}\partial_m),\partial_k)]dx^j\otimes dx^l\\ &= \tilde g^{ik}\cdot\tilde g\left(\frac{1}{2}\tilde g^{rm}(\partial_i\partial_l\tilde g_{rj}-\partial_i\partial_r\tilde g_{jl}-\partial_j\partial_l\tilde g_{ri}+\partial_j\partial_r\tilde g_{il})\partial_m,\partial_k\right)dx^j\otimes dx^l\\ &\quad+(\text{termos de menor ordem})\\ &= \frac{1}{2}\tilde g^{ik}\tilde g^{rm}\tilde g_{mk}(\partial_i\partial_l\tilde g_{rj}-\partial_i\partial_k\tilde g_{jl}-\partial_j\partial_l\tilde g_{ri}+\partial_j\partial_r\tilde g_{il})dx^j\otimes dx^l\\ &\quad+(\text{termos de menor ordem})\\ &= -\frac{1}{2}\tilde g^{ik}(-\partial_i\partial_l\tilde g_{jk}+\partial_i\partial_r\tilde g_{jl}+\partial_j\partial_l\tilde g_{ik}-\partial_j\partial_k\tilde g_{il})dx^j\otimes dx^l\\ &\quad+(\text{termos de menor ordem}).\end{aligned}$$

Como $\xi=\Delta_{\tilde g,h}\mathrm{id}$, em coordenadas locais temos,

$$\begin{aligned}\xi &= \tilde g^{ik}(D^h_{\partial_i}\partial_k-D^{\tilde g}_{\partial_i}\partial_k)\\ &= \tilde g^{ik}((\Gamma)^h)^l_{ik}-(\Gamma)^{\tilde g})^l_{ik})\partial_l,\end{aligned}$$

onde D^h e Γ^h representam a conexão de Levi-Civita e os símbolos de Christoffel da métrica h e $D^{\tilde{g}}$ e $\Gamma^{\tilde{g}}$ representam a conexão de Levi-Civita e os símbolos de Christoffel da métrica $\tilde{g}$.

Um cálculo simples nos mostra que

$$\xi = -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}\tilde{g}^{jl}(\partial_i\tilde{g}_{jk} + \partial_k\tilde{g}_{ij} - \partial_j\tilde{g}_{ik}) + (\text{termos de menor ordem}).$$

Desta forma,

$$\mathscr{L}_\xi\tilde{g} = \tilde{g}^{ik}(\partial_i\partial_l\tilde{g}_{jk} + \partial_j\partial_k\tilde{g}_{il} - \partial_j\partial_l\tilde{g}_{ik})dx^j \otimes dx^l + (\text{termos de menor ordem}).$$

Portanto,

$$-2\mathrm{Ric}_{\tilde{g}} - \mathscr{L}_\xi\tilde{g} = \tilde{g}^{ik}\partial_i\partial_k\tilde{g}_{jl}dx^j \otimes dx^l + (\text{termos de menor ordem}).$$

Linearizando este operador diferencial, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\tilde{g}+tv)^{ik}\partial_i\partial_k(\tilde{g}+tv)_{jl} &= -\tilde{g}^{in}\tilde{g}^{km}v_{nm}\partial_i\partial_k\tilde{g}_{jl} + \tilde{g}^{ik}\partial_i\partial_k v_{jl} \\ &= -v_{nm}\tilde{g}^{in}\tilde{g}^{km}\partial_i\partial_k\tilde{g}_{jl} + \Delta v_{jl}, \end{aligned}$$

donde o seu símbolo principal é dado por

$$\sigma_\xi(-2\mathrm{Ric}_{\tilde{g}} - \mathscr{L}_\xi\tilde{g})_{jl}(v) = |\xi|^2 \cdot v_{jl}.$$

Assim,

$$\langle\sigma_\xi(-2\mathrm{Ric}_{\tilde{g}} - \mathscr{L}_\xi\tilde{g})(v), v\rangle = |\xi|^2|v|^2.$$

Isto significa que a equação do Fluxo de Ricci-de Turck é parabólica. Desta forma, pela existência e unicidade de soluções para equações parabólicas (cf. Teorema 1.4), segue nosso teorema.

□

Veremos que existe uma correspondência natural entre soluções do Fluxo de Ricci-de Turck e do Fluxo de Ricci.

Teorema 2.1 (Hamilton)**.** *Considere M como sendo uma variedade riemanniana compacta munida de uma métrica Riemanniana g_0. Então, existem $T > 0$ real e uma solução $g(t)$, $t \in [0, T)$, do Fluxo de Ricci em M tal que $g(0) = g_0$. A solução $g(t)$ é única.*

Demonstração. Utilizando a Proposição 2.1, podemos garantir a existência de uma única solução $\tilde{g}(t)$ do fluxo de Ricci-de Turck com $t \in [0, T)$ e tal que $\tilde{g}(0) = g_0$. Considere $\varphi_t : M \longrightarrow M$ o fluxo gerado por $\xi_t = \Delta_{\tilde{g}(t),h}\mathrm{id}$, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = \xi_t(\varphi_t(p)),$$

com $\varphi(0) = \mathrm{id}$. Se definimos $g(t) = \varphi_t^*(\tilde{g}(t))$, para $t \in [0, T)$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t^*(\tilde{g}(t)) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} [\varphi_{t+s}^*(\tilde{g}(t+s))] \\
&= \varphi_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}(t) \right) + \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \varphi_{t+s}^*(\tilde{g}(t)) \\
&= \varphi_t^*(-2\mathrm{Ric}_{\tilde{g}(t)} - \mathscr{L}_{\xi_t} \tilde{g}(t)) + \mathscr{L}_{(\varphi_t^{-1})_* \xi_t} \varphi_t^*(\tilde{g}(t)) \\
&= \varphi_t^*(-2\mathrm{Ric}_{\tilde{g}(t)} - \mathscr{L}_{\xi_t} \tilde{g}(t)) + \varphi_t^*(\mathscr{L}_{\xi_t} \tilde{g}(t)) \\
&= \varphi_t^*(-2\mathrm{Ric}_{\tilde{g}(t)}) \\
&= -2\mathrm{Ric}_{\varphi_t^*(\tilde{g}(t))} \\
&= -2\mathrm{Ric}_{g(t)}.
\end{aligned}
$$

Assim, garantimos a existência do fluxo de Ricci.

Suponha agora que $g^1(t)$ e $g^2(t)$, $t \in [0, T)$, são soluções do fluxo de Ricci com condição inicial $g^1(0) = g^2(0) = g_0$ e que $g^1(t_0) \neq g^2(t_0)$, para algum $t_0 \in (0, T)$. Desta forma, podemos considerar

$$\tau := \inf \left\{ t \in (0, T); g^1(t) \neq g^2(t) \right\}.$$

Segue da continuidade de g e da definição de τ que $g^1(\tau) = g^2(\tau)$. Sejam φ_τ^1 e φ_τ^2 soluções das equações de evolução

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t^1 = \Delta_{g^1(t),h} \varphi_t^1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t^2 = \Delta_{g^2(t),h} \varphi_t^2, \tag{2.1}$$

com condições iniciais $\varphi_\tau^1 = \mathrm{id}$ e $\varphi_\tau^2 = \mathrm{id}$. Segue da teoria de E.D.P., que existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, de forma que as soluções $\varphi_t^1 : M \longrightarrow M$ e $\varphi_t^2 : M \longrightarrow M$ estão definidas e são difeomorfismos para todos $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$.

Para cada $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$, defina duas métricas riemannianas $\tilde{g}^1(t)$ e $\tilde{g}^1(t)$ em M por $(\varphi_t^1)^*(\tilde{g}^1(t)) = g^1(t)$ e $(\varphi_t^2)^*(\tilde{g}^2(t)) = g^2(t)$. Considerando $\xi_i = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t^i$, teremos que

$$\varphi_t^{i*}(-2\mathrm{Ric}_{\tilde{g}_i}) = -2\mathrm{Ric}_{\varphi_t^{i*} \tilde{g}_i} = -2\mathrm{Ric}_{g_i} = \frac{\partial}{\partial t} g_i = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t^{i*} \tilde{g}_i = \varphi_t^{i*} \left(\mathscr{L}_{\xi_i} \tilde{g}_i + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_i \right),$$

onde $i = 1, 2$. Isto significa que $\tilde{g}^1(t)$ e $\tilde{g}^2(t)$, $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$, são soluções do fluxo de Ricci-de Turck. Como $\tilde{g}^1(\tau) = \tilde{g}^2(\tau)$, segue da unicidade da Proposição 2.1 que $\tilde{g}^1(t) = \tilde{g}^2(t)$, para todos $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$ possivelmente menor. Assim, se $i = 1, 2$, utilizando algumas propriedades do laplaciano, temos que

$$\xi_t(\varphi_t^i(p)) = (\Delta_{g^i(t),h} \mathrm{id})(\varphi_t^i(p)) = (\Delta_{g^i(t),h} \varphi_t)(p) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t^i.$$

Como $\varphi_\tau^1 = \varphi_\tau^2 = \mathrm{id}$, segue da unicidade dos Problemas em (2.1) que $\varphi_t^1 = \varphi_t^2$, para todos $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$. Portanto,

$$g^1(t) = (\varphi_t^1)^*(\tilde{g}^1(t)) = (\varphi_t^2)^*(\tilde{g}^2(t)) = g^2(t),$$

para todos $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$. Isto contradiz a definição de τ.

Este absurdo demonstra a unicidade da solução do fluxo de Ricci.

$\square$

2.2 Equações de evolução sob o Fluxo de Ricci

Considere X e Y dois campos de vetores (independentes de t) numa variedade riemanniana compacta M Denotemos

$$A(X, Y) = \frac{\partial}{\partial t}(D_X Y)$$

Observe que A é um tensor pois é a diferença de duas conexões.

No que segue a esta seção, $g = g(t)$ denotará uma família a 1-parâmetro de métricas que é solução do Fluxo de Ricci, isto é, $\frac{\partial}{\partial t} g = -2\mathrm{Ric}_g$. Nosso objetivo será obter equações de evolução para a conexão de Levi-Civita e para o tensor de curvatura ao longo do Fluxo de Ricci.

Proposição 2.2. *Se X, Y, Z são campos de vetores fixados em M, então*

$$g(A(X, Y), Z) = -(D_X Ric)(Y, Z) - (D_Y Ric)(X, Z) + (D_Z Ric)(X, Y).$$

Demonstração.

Como D é a conexão de Levi-Civita, segue da Fórmula de Koszul que

$$\begin{aligned} 2g(D_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ &+ +g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Diferenciando ambos os lados desta expressão e utilizando que g é solução do Fluxo de Ricci, temos

$$\begin{aligned} -4\mathrm{Ric}(D_X Y, Z) + 2g(A(X, Y), Z) &= X(-2\mathrm{Ric}(Y, Z)) + Y(-2\mathrm{Ric}(X, Z)) \\ &\quad -Z(-2\mathrm{Ric}(X, Y)) - 2\mathrm{Ric}([X, Y], Z) \\ &\quad +2\mathrm{Ric}([X, Z], Y) + 2\mathrm{Ric}([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Lembrando que D é livre de torção, concluiremos que

$$\begin{aligned} g(A(X, Y), Z) &= -X(\mathrm{Ric}(Y, Z)) + \mathrm{Ric}(D_X Z, Y) + \mathrm{Ric}(D_X Y, Z) \\ &\quad -Y(\mathrm{Ric}(X, Z)) + \mathrm{Ric}(D_Y X, Z) + \mathrm{Ric}(D_Y Z, Z) \\ &\quad +Z(\mathrm{Ric}(X, Y)) - \mathrm{Ric}(D_Z X, Y) - \mathrm{Ric}(D_Z Y, X) \\ &= -(D_X \mathrm{Ric})(Y, Z) - (D_Y \mathrm{Ric})(X, Z) + (D_Z \mathrm{Ric})(X, Y). \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 2.3. *Considere X, Y, Z, W campos de vetores fixados em M. Então*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} R(X,Y,Z,W) &= \left(D^2_{X,Z} Ric\right)(Y,W) - \left(D^2_{X,W} Ric\right)(Y,Z) \\
&- \left(D^2_{Y,Z} Ric\right)(X,W) + \left(D^2_{Y,W} Ric\right)(X,Z) \\
&- \sum_{k=1}^{n} Ric(Z,e_k) R(X,Y,e_k,W) - \sum_{k=1}^{n} Ric(W,e_k) R(X,Y,Z,e_k)
\end{aligned}$$

Demonstração.
Inicialmente, note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z) &= D_X(A(Y,Z)) - D_Y(A(X,Z)) + A(X, D_Y Z) \\
&\quad - A(Y, D_X Z) - A([X,Y], Z) \\
&= (D_X A)(Y,Z) - (D_Y A)(X,Z).
\end{aligned}$$

Como $R(X,Y,Z,W) = -g(D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z, W)$ e g é uma solução do Fluxo de Ricci, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} R(X,Y,Z,W) &= -g((D_X A)(Y,Z), W) + g((D_Y A)(X,Z), W) \\
&\quad + 2\mathrm{Ric}(D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z, W) \\
&= -g((D_X A)(Y,Z), W) + g((D_Y A)(X,Z), W) \\
&\quad - 2\sum_{k=1}^{n} R(X,Y,Z,e_k)\mathrm{Ric}(e_k, W).
\end{aligned}$$

Utilizando a Proposição 2.2, temos

$$
\begin{aligned}
g((D_XA)(Y,Z),W) &= X(g(A(Y,Z),W)) - g(A(Y,Z),D_XW) \\
&\quad -g(A(D_XY,Z),W) - g(A(Y,D_XZ),W) \\
&= X(-(D_Y\mathrm{Ric})(Z,W) - (D_Z\mathrm{Ric})(Y,W) + (D_W\mathrm{Ric})(Y,Z)) \\
&\quad -g(A(Y,Z),D_XW) - g(A(D_XY,Z),W) - g(A(Y,D_XZ),W) \\
&= -(D_XD_Y\mathrm{Ric})(Z,W) - (D_Y\mathrm{Ric})(D_XZ,W) - (D_Y\mathrm{Ric})(Z,D_XW) \\
&\quad -(D_XD_Z\mathrm{Ric})(Y,W) - (D_Z\mathrm{Ric})(D_XY,W) - (D_Z\mathrm{Ric})(D_XY,W) \\
&\quad +(D_XD_W\mathrm{Ric})(Y,Z) + (D_W\mathrm{Ric})(D_XY,Z) + (D_W\mathrm{Ric})(D_XY,Z) \\
&\quad +(D_{D_XY}\mathrm{Ric})(Z,W) + (D_Z\mathrm{Ric})(D_XY,W) - (D_W\mathrm{Ric})(D_XY,Z) \\
&\quad +(D_Y\mathrm{Ric})(Z,D_XW) + (D_Z\mathrm{Ric})(Y,D_XW) - (D_{D_XW}\mathrm{Ric})(Y,Z) \\
&\quad +(D_Y\mathrm{Ric})(D_XZ,W) + (D_{D_XZ}\mathrm{Ric})(Y,W) + (D_W\mathrm{Ric})(Y,D_XZ) \\
&= -(D_XD_Y\mathrm{Ric})(Z,W) + (D_{D_XY}\mathrm{Ric})(Z,W) - (D_XD_Z\mathrm{Ric})(Y,W) \\
&\quad +(D_{D_XZ}\mathrm{Ric})(Y,W) + (D_XD_W\mathrm{Ric})(Y,Z) - (D_{D_XW}\mathrm{Ric})(Y,Z) \\
&= -(D^2_{X,Y}\mathrm{Ric})(Z,W) - (D^2_{X,Z}\mathrm{Ric})(Y,W) + (D^2_{X,W}\mathrm{Ric})(Y,Z).
\end{aligned}
$$

Analogamente, temos que

$$
g((D_YA)(X,Z),W) = -(D^2_{Y,X}\mathrm{Ric})(Z,W) - (D^2_{Y,Z}\mathrm{Ric})(X,W) + (D^2_{Y,W}\mathrm{Ric})(X,Z).
$$

Observando que

$$
\begin{aligned}
(D^2_{X,Y}\mathrm{Ric})(Z,W) - (D^2_{Y,X}\mathrm{Ric})(Z,W) &= \sum_{k=1}^{n} R(X,Y,Z,e_k)\mathrm{Ric}(e_k,W) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} R(X,Y,W,e_k)\mathrm{Ric}(Z,e_k),
\end{aligned}
$$

concluímos o resultado desejado.

□

Definição 2.4. *Dado um tensor de curvatura R, definimos o $(0,4)$-tensor $Q(R)$ por*

$$
\begin{aligned}
Q(R)(X,Y,Z,W) &= \sum_{p,q=1}^{n} R(X,Y,e_p,e_q)R(Z,W,e_p,e_q) \\
&\quad +2\sum_{p,q=1}^{n} R(X,e_p,Z,e_q)R(Y,e_p,W,e_q) \\
&\quad -2\sum_{p,q=1}^{n} R(X,e_p,W,e_q)R(Y,e_p,Z,e_q),
\end{aligned}
$$

onde X, Y, Z, W são campos em M.

Proposição 2.4. *Considere X, Y, Z, W campos fixados em M. Então*

$$\begin{aligned}
&\left(D^2_{X,Z}Ric\right)(Y,W) - \left(D^2_{X,W}Ric\right)(Y,Z)\\
&- \left(D^2_{Y,Z}Ric\right)(X,W) + \left(D^2_{Y,W}Ric\right)(X,Z)\\
&= (\Delta R)(X,Y,Z,W) + Q(R)(X,Y,Z,W)\\
&- \sum_{k=1}^{n} Ric(X,e_k)R(e_k,Y,Z,W) - \sum_{k=1}^{n} Ric(Y,e_k)R(X,e_k,Z,W)
\end{aligned}$$

Demonstração.
Note que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(D^2_{X,e_k}R)(e_k,Y,Z,W) - \sum_{k=1}^{n}(D^2_{e_k,X}R)(e_k,Y,Z,W)\\
&= \sum_{k,l=1}^{n} R(X,e_k,e_k,e_l)R(e_l,Y,Z,W) + \sum_{k,l=1}^{n} R(X,e_k,Y,e_l)R(e_k,e_l,Z,W)\\
&+ \sum_{k,l=1}^{n} R(X,e_k,Z,e_l)R(e_k,Y,e_l,W) + \sum_{k,l=1}^{n} R(X,e_k,W,e_l)R(e_k,Y,Z,e_l)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

e

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(D^2_{Y,e_k}R)(e_k,X,Z,W) - \sum_{k=1}^{n}(D^2_{e_k,Y}R)(e_k,X,Z,W)\\
&= \sum_{k,l=1}^{n} R(Y,e_k,e_k,e_l)R(e_l,X,Z,W) + \sum_{k,l=1}^{n} R(Y,e_k,X,e_l)R(e_k,e_l,Z,W)\\
&+ \sum_{k,l=1}^{n} R(Y,e_k,Z,e_l)R(e_k,X,e_l,W) + \sum_{k,l=1}^{n} R(Y,e_k,W,e_l)R(e_k,X,Z,e_l).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Subtraindo (2.3) de (2.2), utilizando as relações de simetria do tensor curvatura e a 1^a Identidade de Bianchi, obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(D^2_{X,e_k}R)(e_k,Y,Z,W) - \sum_{k=1}^{n}(D^2_{e_k,X}R)(e_k,Y,Z,W)\\
&- \sum_{k=1}^{n}(D^2_{Y,e_k}R)(e_k,X,Z,W) + \sum_{k=1}^{n}(D^2_{e_k,Y}R)(e_k,X,Z,W)\\
&= Q(R)(X,Y,Z,W)\\
&- \sum_{l=1}^{n} \mathrm{Ric}(X,e_l)R(e_l,Y,Z,W) - \sum_{l=1}^{n} \mathrm{Ric}(Y,e_l)R(X,e_l,Z,W).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Utilizando a 2^a Identidade de Bianchi e fazendo um cálculo similar ao feito na proposição anterior, podemos obter que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(D^2_{X,e_k}R)(e_k,Y,Z,W)\\
&=\sum_{k=1}^{n}(D^2_{X,Z}R)(e_k,Y,e_k,W)-\sum_{k=1}^{n}(D^2_{X,W}R)(e_k,Y,e_k,Z)\\
&=(D^2_{X,Z}\mathrm{Ric})(Y,W)-(D^2_{X,W}\mathrm{Ric})(Y,Z). \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\sum_{k=1}^{n}(D^2_{Y,e_k}R)(e_k,X,Z,W)=(D^2_{Y,Z}\mathrm{Ric})(X,W)-(D^2_{Y,W}\mathrm{Ric})(X,Z). \qquad (2.6)$$

Usando a 2^a Identidade de Bianchi também temos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(D^2_{e_k,X}R)(e_k,Y,Z,W)-\sum_{k=1}^{n}(D^2_{e_k,Y}R)(e_k,X,Z,W)\\
&=\sum_{k=1}^{n}(D^2_{e_k,e_k}R)(X,Y,Z,W)=(\Delta R)(X,Y,Z,W). \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.5), (2.6) e (2.7) em (2.4), chegamos ao resultado desejado.

$\square$

Corolário 2.1. *Considere X,Y,Z,W campos fixados em M. Então*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}R(X,Y,Z,W)=(\Delta R)(X,Y,Z,W)+Q(R)(X,Y,Z,W)\\
&-\sum_{k=1}^{n}Ric(X,e_k)R(e_k,Y,Z,W)-\sum_{k=1}^{n}Ric(Y,e_k)R(X,e_k,Z,W)\\
&-\sum_{k=1}^{n}Ric(Z,e_k)R(X,Y,e_k,W)-\sum_{k=1}^{n}Ric(W,e_k)R(X,Y,Z,e_k).
\end{aligned}$$

Demonstração.

Segue diretamente das Proposições 2.3 e 2.4.

$\square$

A partir de agora, usaremos o chamado truque de Uhlenbeck como forma de simplificar as equações de evolução obtidas para o tensor de curvatura sob o fluxo de Ricci.

Para isto, considere E como sendo o pull-back do fibrado tangente TM pela projeção canônica $(p,t) \xrightarrow{\pi} p$. Desta forma, a fibra de E sobre qualquer ponto $(p,t) \in M \times (0,T)$ será dada por $E_{(p,t)} = T_pM$.

Sobre o fibrado E existe uma conexão natural que estenderá a conexão D de M à TM. Se denotarmos por D esta conexão, para cada seção X de E, definimos adicionalmente

$$D_{\frac{\partial}{\partial t}} X = \frac{\partial}{\partial t} X - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}(X, e_k),$$

onde $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal com respeito à métrica $g(t)$. Como forma de enxugar a notação, representaremos $D_{\frac{\partial}{\partial t}} = D_{\partial t}$.

Proposição 2.5. *A conexão induzida D sobre o fibrado de Uhlenbeck é compatível com a métrica g em E.*

Demonstração. Considere X e Y como sendo campos em M, que podemos supor independentes do tempo. Temos que

$$\begin{aligned}
D_{\partial t} g(X,Y) &= \frac{\partial}{\partial t}(g(X,Y)) - g\left(D_{\partial t}X, Y\right) - g\left(X, D_{\partial t}Y\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(g(X,Y)) - g\left(-\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}(X,e_k)e_k, Y\right) \\
&\quad -g\left(X, -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}(Y,e_k)e_k\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(g(X,Y)) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}(X,e_k)g(e_k,Y) + \mathrm{Ric}(Y,e_k)g(X,e_k) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(g(X,Y)) + 2\mathrm{Ric}(X,Y) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois g é uma solução do fluxo de Ricci. Isto comprova que D é compatível com a métrica.

$\square$

Proposição 2.6. *Para todos os campos X, Y, Z, W em M, temos que*

$$(D_{\partial t}R)(X,Y,Z,W) = (\Delta R)(X,Y,Z,W) + Q(R)(X,Y,Z,W).$$

Demonstração. Assumindo que os campos X, Y, Z, W são campos independentes do tempo, temos que

$$\begin{aligned}
(D_{\partial t}R)(X,Y,Z,W) &= \frac{\partial}{\partial t}(R(X,Y,Z,W)) - R\left(D_{\partial t}X,Y,Z,W\right) - R\left(X,D_{\partial t}Y,Z,W\right) \\
&\quad -R\left(X,Y,D_{\partial t}Z,W\right) - R\left(X,Y,Z,D_{\partial t}W\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(R(X,Y,Z,W)) + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ric}(X,e_k)R(e_k,Y,Z,W) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ric}(Y,e_k)R(X,e_k,Z,W) + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ric}(Z,e_k)R(X,Y,e_k,W) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ric}(W,e_k)R(X,Y,Z,e_k) \\
&= (\Delta R)(X,Y,Z,W) + Q(R)(X,Y,Z,W).
\end{aligned}$$

Na última igualdade utilizamos o Corolário 2.1.

□

Proposição 2.7. *O tensor de Ricci de $g(t)$ satizfaz à equação de evolução*

$$(D_{\partial t}Ric)(X,Y) = (\Delta Ric)(X,Y) + 2\sum_{p,q=1}^{n} R(X,e_p,Y,e_q)Ric(e_p,e_q),$$

para todos campos X, Y em M.

Demonstração. Como

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{k=1}^{n} R(X,e_k,Y,e_k),$$

segue diretamente da Proposição 2.6 que

$$(D_{\partial t}\mathrm{Ric})(X,Y) = (\Delta\mathrm{Ric})(X,Y) + \sum_{k=1}^{n} Q(R)(X,e_k,Y,e_k). \tag{2.8}$$

Utilizando a definição de $Q(R)$, vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} Q(R)(X,e_k,Y,e_k) &= \sum_{k,p,q=1}^{n} R(X,e_k,e_p,e_q)R(Y,e_k,e_p,e_q) \\
&\quad +2\sum_{k,p,q=1}^{n} R(X,e_p,Y,e_q)R(e_k,e_p,e_k,e_q) \\
&\quad -2\sum_{k,p,q=1}^{n} R(X,e_p,e_k,e_q)R(Y,e_q,e_k,e_p).
\end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando a 1^a Identidade de Bianchi e as simetrias do tensor de curvatura temos

$$\begin{aligned}
&+2\sum_{k,p,q=1}^{n} R(X,e_p,e_k,e_q)R(Y,e_q,e_k,e_p)\\
&=\sum_{k,p,q=1}^{n} R(X,e_p,e_k,e_q)R(Y,e_q,e_k,e_p)+\sum_{q,p,k=1}^{n} R(X,e_p,e_q,e_k)R(Y,e_k,e_q,e_p)\\
&=\sum_{k,p,q=1}^{n} R(X,e_p,e_k,e_q)[R(Y,e_q,e_k,e_p)-R(Y,e_k,e_q,e_p)]\\
&=\sum_{k,p,q=1}^{n} R(X,e_p,e_k,e_q)R(Y,e_p,e_k,e_q).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} Q(R)(X,e_k,Y,e_k) &= +2\sum_{k,p,q=1}^{n} R(X,e_p,Y,e_q)R(e_k,e_p,e_k,e_q)\\
&= 2\sum_{p,q=1}^{n} R(X,e_p,Y,e_q)\mathrm{Ric}(e_p,e_q).
\end{aligned}$$

Substituindo a identidade acima em (2.8), chegamos ao resultado almejado.

□

Corolário 2.2. *A curvatura escalar de $g(t)$ satisfaz a equação de evolução*

$$\frac{\partial}{\partial t} scal = \Delta scal + 2|Ric|^2$$

Demonstração. Como

$$\mathrm{scal} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_k,e_k),$$

A assertiva segue diretamente da Proposição 2.7.

□

Corolário 2.3. *O tensor traço livre de Ricci de $g(t)$ satisfaz a equação de evolução*

$$\begin{aligned}
(D_{\partial t} \overset{o}{Ric})(X,Y) &= (\Delta \overset{o}{Ric})(X,Y) + 2\sum_{p,q=1}^{n} R(X,e_p,Y,e_q) \overset{o}{Ric}(e_p,e_q)\\
&\quad + \frac{2}{n} scal \overset{o}{Ric}(X,Y) - \frac{2}{n}|\overset{o}{Ric}|^2 g(X,Y).
\end{aligned}$$

Demonstração. Como

$$\overset{o}{\mathrm{Ric}}\,(X,Y) = \mathrm{Ric}(X,Y) - \frac{1}{n}\mathrm{scal}\cdot g(X,Y),$$

a assertiva segue diretamente das Proposições 2.6 e 2.7 e do Corolário 2.2.

□

Agora, utilizaremos o princípio do máximo escalar para caracterizar soluções do fluxo de Ricci.

Proposição 2.8. *Considere (M, g_0) uma variedade riemanniana compacta com $scal_{g_0} \geq 0$, para todos os pontos $p \in M$. Então, se $g(t)$, $t \in [0,T)$, é solução do fluxo de Ricci com $g(0) = g_0$ temos que $scal_{g_t} \geq 0$, para todos os pontos $p \in M$ e todo $t \in [0,T)$.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.2 já vimos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{scal} \geq \Delta\mathrm{scal},$$

para todos pontos $p \in M$ e todo $t \in [0,T)$. Portanto a assertiva segue do Princípio do Máximo escalar (cf. Teorema 1.5).

□

Proposição 2.9. *Suponha que (M, g_0) é uma variedade riemanniana compacta, $g(t)$, $t \in [0,T)$, é solução do fluxo de Ricci com $g(0) = g_0$ e $\inf_M scal_{g_0} = \alpha > 0$. Então $T \leq \frac{n}{2\alpha}$ e $\inf_M scal_{g(t)} \geq \frac{n\alpha}{n-2\alpha t}$, para todo $t \in [0,T)$.*

Demonstração. Antes de mais nada, lembre que

$$|\mathrm{Ric}|^2 = |\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2 + \frac{1}{n}\mathrm{scal}^2 \geq \frac{1}{n}\mathrm{scal}^2.$$

Defina a função $\psi : M \times [0,\tau)$, com $\tau = \min\left\{T, \frac{n}{2\alpha}\right\}$, por

$$\psi(p,t) = \mathrm{scal}_{g(t)}(p) - \frac{n\alpha}{n-2\alpha t}.$$

Observe que $\Delta\psi = \Delta\mathrm{scal}$. Usamos o Corolário 2.2 para obter que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\psi &= \Delta\mathrm{scal} + 2|\mathrm{Ric}|^2 - \frac{2n\alpha^2}{(n-2\alpha t)^2} \\
&\geq \Delta\psi + \frac{2}{n}\mathrm{scal}^2 - \frac{2}{n}\left(\frac{n\alpha}{n-2\alpha t}\right)^2 \\
&= \Delta\psi + \frac{2}{n}\left(\mathrm{scal} + \frac{n\alpha}{n-2\alpha t}\right)\psi,
\end{aligned}$$

em $M \times [0,\tau)$. Segue da definição de α que

$$\psi(p,0) = \mathrm{scal}_{g(0)} - \alpha \geq 0.$$

Assim, utilizando o Princípio do Máximo escalar (cf. Teorema 1.5), inferimos que $\psi(p,t) \geq 0$, $\forall t \in [o,\tau)$ e todo $p \in M$. Daí, concluímos que

$$\inf_M \mathrm{scal}_{g(t)} \geq \frac{n\alpha}{n - 2\alpha t},$$

para todo $t \in [0,\tau)$.

Se supôssemos que $\frac{n}{2\alpha} < T$, teríamos que $\tau = \frac{n}{2\alpha}$ e assim

$$\lim_{t\to\tau} h(p,t) = -\infty.$$

Isto seria um absurdo visto que $h(p,t) \geq 0$, $\forall (p,t) \in M \times [0,\tau)$. Portanto, $T \leq \frac{n}{2\alpha}$.

□

2.3 Estimativas de Shi e Soluções Máximas

Esta seção tem como objetivo estabelecer estimativas para as derivadas covariantes do tensor de curvatura sob o fluxo de Ricci. Estas estimativas, que foram primordialmente obtidas por W. X. Shi em [33], servirão principalmente para determinar um critério para caracterizar as soluções máximas do Fluxo de Ricci.

Ao que compete esta seção, dados dois tensores A, B, denotaremos por $A * B$ qualquer expressão bilinear em A e B.

Lema 2.1. *Considere M uma variedade riemanniana compacta e $g(t)$, $t \in [0,\tau)$, uma solução do Fluxo de Ricci em M. Então*

$$\frac{\partial}{\partial t} D^m R = \Delta D^m R + \sum_{i=0}^{m} D^i R * D^{m-i} R,$$

onde $m \geq 0$ é inteiro.

Demonstração.

Faremos esta demonstração por indução.

Se $m = 0$, a demonstração segue diretamente do Corolário 2.1.

Suponha agora que $m \geq 1$ e

$$\frac{\partial}{\partial t} D^{m-1} R = \Delta D^{m-1} R + \sum_{i=0}^{m-1} D^i R * D^{m-i-1} R.$$

Aplicando a derivada covariante em ambos os lados, vemos que

$$D\left(\frac{\partial}{\partial t} D^{m-1} R\right) = D(\Delta D^{m-1} R) + \sum_{i=0}^{m-1} D(D^i R * D^{m-i-1} R). \tag{2.9}$$

Observe que

$$D(D^iR * D^{m-i-1}R) = D^{i+1}R * D^{m-(i+1)}R + D^iR * D^{m-i}R \tag{2.10}$$

e, utilizando a Proposição 2.2,

$$D\left(\frac{\partial}{\partial t}D^{m-1}R\right) = \frac{\partial}{\partial t}D^mR + DR * D^{m-1}R \tag{2.11}$$

Além disso, utilizando a Observação 1.2, temos que

$$D(\Delta D^{m-1}R) = \Delta(D^mR) + DR * D^{m-1}R + R * D^mR. \tag{2.12}$$

Substituindo (2.10), (2.11) e (2.12) em (2.9), concluiremos que

$$\frac{\partial}{\partial t}D^mR = \Delta D^mR + \sum_{i=0}^{m} D^iR * D^{m-i}R$$

□

Proposição 2.10 (W. X. Shi, [33])**.** *Considere M uma variedade riemanniana compacta de dimensão n e $g(t)$, $t \in [0,\tau]$, uma solução do Fluxo de Ricci em M. Suponha que*

$$\sup_M |R_{g(t)}| \leq \tau^{-1},$$

para todo $t \in [0,\tau]$. Então, para cada $m \geq 0$, existe uma constante $C = C(m,n) > 0$, dependendo apenas de m e n, tal que

$$\sup_M |D^mR_{g(t)}|^2 \leq C\tau^{-2}t^{-m},$$

para todo $t \in (0,\tau]$.

Demonstração.

Novamente, demonstraremos por indução.

Para $m = 0$, a assertiva segue da hipótese da proposição.

Suponha, agora, que $m \geq 1$ e que a assertiva é válida para todo $0 \leq l \leq m-1$. Considerando $C_1 = \max\{C(0,n), C(1,n), \ldots, C(m-1,n)\}$ e . Utilizando o Lema 2.1 temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\|D^{m-1}R\|^2 &= 2\left\langle \frac{\partial}{\partial t}D^{m-1}R, D^{m-1}R\right\rangle \\
&= 2\left\langle \Delta(D^{m-1}R), D^{m-1}R\right\rangle \\
&\quad +2\left\langle \sum_{i=0}^{m-1} D^iR * D^{m-1-i}R, D^{m-1}R\right\rangle.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
2\left\langle\Delta(D^{m-1}R), D^{m-1}R\right\rangle &= 2\langle g^{ij}D_iD_jD^{m-1}R, D^{m-1}R\rangle \\
&= g^{ij}D_i(2\langle D_jD^{m-1}R, D^{m-1}R\rangle) - 2g^{ij}\langle D_jD^{m-1}R, D_iD^{m-1}R\rangle \\
&= g^{ij}D_i(D_j\langle D^{m-1}R, D^{m-1}R\rangle) - 2\langle D^mR, D^mR\rangle \\
&= \Delta\langle D^{m-1}R, D^{m-1}R\rangle - 2\|D^mR\|^2 \\
&= \Delta\|D^{m-1}R\|^2 - 2\|D^mR\|^2. \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

Como a operação $*$ é contínua, é possível encontrar uma constante K que depende da dimensão n de M e do modo como definimos $*$(em nosso caso, K depende de n e de m), tal que $\|A * B\| \leq K\|A\|\|B\|$. Assim segue de (2.13), (2.14) e da desigualdade de Cauchy-Schwartz, que existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$
\frac{\partial}{\partial t}\|D^{m-1}R\|^2 \leq \Delta\|D^{m-1}R\|^2 - 2\|D^mR\|^2 + C_2\sum_{i=0}^{m-1}\|D^iR\|\|D^{m-1-i}\|\|D^{m-1}R\|,
$$

para todo $t \in (0, \tau]$.

Daí, utilizando a hipótese de indução, encontramos uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\|D^{m-1}R\|^2 &\leq \Delta\|D^{m-1}R\|^2 - 2\|D^mR\|^2 + C_3(\tau^{-2}t^{-i})^{\frac{1}{2}}(\tau^{-2}t^{1+i-m})^{\frac{1}{2}}(\tau^{-2}t^{1-m})^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Delta\|D^{m-1}R\|^2 - 2\|D^mR\|^2 + C_3\tau^{-3}t^{-m+1}.
\end{aligned}
$$

Como $t \in (0, \tau]$, temos que $t\tau^{-1} \leq 1$, donde

$$
\frac{\partial}{\partial t}\|D^{m-1}R\|^2 \leq \Delta\|D^{m-1}R\|^2 - 2\|D^mR\|^2 + C_3\tau^{-2}t^{-m}. \qquad (2.15)
$$

Raciocinando de maneira análoga, podemos encontrar constantes C_4 e C_4' tais que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\|D^mR\|^2 &\leq \Delta\|D^mR\|^2 - 2\|D^{m+1}R\|^2 + C_4\sum_{i=0}^{m}\|D^iR\|\|D^{m-i}R\|\|D^mR\| \\
&\leq \Delta\|D^mR\|^2 + C_4\tau^{-1}\|D^mR\|^2 + C_4'\tau^{-1}t^{-\frac{m}{2}}\|D^mR\|.
\end{aligned}
$$

Tomando $C_5 = \max\{C_4, C_4'\}$, temos que

$$
\frac{\partial}{\partial t}\|D^mR\|^2 \leq \Delta\|D^mR\|^2 + C_5(t^{-1}\|D^mR\|^2 + \tau^{-1}t^{\frac{-m}{2}}\|D^mR\|). \qquad (2.16)
$$

Defina agora uma função $F : M \times [0, \tau] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$
F(x, t) = t^{m+1}\|D^mR\|^2 + \frac{1}{2}(C_5 + m + 2)t^m\|D^{m-1}R\|^2
$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}F &= (m+1)t^m\|D^mR\|^2 + t^{m+1}\frac{\partial}{\partial t}(\|D^mR\|^2) + \frac{mt^{m-1}}{2}(C_5+m+2)\|D^{m-1}R\|^2 \\
&\quad + \frac{t^m}{2}(C_5+m+2)\frac{\partial}{\partial t}\left(\|D^{m-1}R\|^2\right) \\
&\leq (m+1)t^m\|D^mR\|^2 + t^{m+1}(\Delta\|D^mR\|^2 + C_5t^{-1}\|D^mR\|^2 + C_5\tau^{-1}t^{-\frac{m}{2}}\|D^mR\|) \\
&\quad + \frac{t^m}{2}(C_5+m+2)(\Delta\|D^{m-1}\|^2 - 2\|D^mR\|^2 + C_3\tau^{-2}t^{-m}) \\
&\quad + \frac{mt^{m-1}}{2}(C_5+m+2)\|D^{m-1}R\|^2 \\
&= \Delta F + C_5t^m\|D^mR\|^2 + C_5\tau^{-1}t^{\frac{m}{2}+1}\|D^mR\| + (m+1)t^m\|D^mR\|^2 \\
&\quad - t^m(C_5+m+2)\|D^mR\|^2 + C_3(C_5+m+2)\frac{\tau^{-2}}{2} \\
&\quad + \frac{m}{2}(C_5+m+2)t^{m-1}\|D^{m-1}R\|^2 \\
&\leq \Delta F - t^m\|D^mR\|^2 + C_5\tau^{-1}t^{\frac{m}{2}}\|D^mR\| + \frac{C_3}{2}(C_5+m+2)\tau^{-2} + \frac{C_1m}{2}(C_5+m+2)\tau^{-2}
\end{aligned}$$

Como

$$t^m\|D^mR\|^2 + C_5\tau^{-1}t^{\frac{m}{2}}\|D^mR\| = -\left(t^{\frac{m}{2}}\|D^mR\| - \frac{C_5}{2}\tau^{-1}\right)^2 + \frac{C_5^2}{4}\tau^{-2} \quad (2.17)$$

$$\leq \frac{C_5^2}{4}\tau^{-2}, \quad (2.18)$$

segue que podemos encontrar uma constante $C_6 > 0$, que depende apenas de m e n tal que

$$\frac{\partial}{\partial t}F \leq \Delta F + C_6\tau^{-2}.$$

Como $F(x,0) = 0$, para todo $x \in M$, segue do Princípio do Máximo escalar (cf. Teorema 1.5) que

$$F(x,t) \leq C_6\tau^{-2}t,$$

para todo $(x,t) \in M \times [0,\tau]$. Lembrando da definição de F, temos que

$$t^{m+1}\|D^mR\| \leq F(x,t) \leq C_6\tau^{-2}t,$$

para todo $(x,t) \in M \times [0,\tau]$, de onde concluiremos que

$$\|D^mR\|^2 \leq C_6\tau^{-2}t^{-m},$$

para todo $(x,t) \in M \times [0,\tau]$.

□

Corolário 2.4 (W. X. Shi, [33]). *Considere M uma variedade riemanniana compacta de dimensão n e $g(t)$, $t \in [0,\tau]$, uma solução do Fluxo de Ricci em M. Suponha que*

$$\sup_M |R_{g(t)}| \leq \tau^{-1},$$

para todo $t \in [0,\tau]$. Então, para cada inteiro $m \geq 0$, existe uma constante $C = C(m,n) > 0$, dependendo apenas de m e n, tal que

$$\sup_M |D^m R_{g(t)}|^2 \leq C\tau^{-m-2},$$

para todo $t \in (\tau/2, \tau]$.

A partir de agora, consideraremos um tensor suave H em M que satisfaz uma equação de evolução

$$\frac{\partial}{\partial t} H = \Delta H + R * H. \tag{2.19}$$

Procedendo da mesma forma que anteriormente, encontraremos estimativas para as derivadas covariantes do tensor H.

Lema 2.2. *Considere M uma variedade riemanniana compacta e $g(t)$, $t \in [0,\tau]$, uma solução do Fluxo de Ricci em M. Se H é um tensor suave em M satisfazendo* (2.19), *temos*

$$\frac{\partial}{\partial t} D^m H = \Delta(D^m H) + \sum_{i=0}^{m} D^i R * D^{m-i} H$$

Demonstração. Seguindo os moldes da demonstração do Lema 2.1, demonstraremos por indução. Se $m = 0$, o resultado segue da identidade (2.19).

Se supomos a afirmação válida para a derivada covariante de ordem $m-1$, $m \geq 1$, temos que

$$D\left(\frac{\partial}{\partial t} D^{m-1} H\right) = D(\Delta(D^{m-1}H)) + \sum_{i=0}^{m-1} D(D^i R * D^{m-i-1} H). \tag{2.20}$$

Procedendo como na demontração do Lema 2.1, temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} D^m H = DR * D^{m-1} H + D\left(\frac{\partial}{\partial t} D^{m-1} H\right), \tag{2.21}$$

$$D(\Delta(D^{m-1}H)) = \Delta(D^m H) + R * D^m H + DR * D^{m-1} H \tag{2.22}$$

e

$$D(D^i R * D^{m-i-1} H) = D^{i+1} R * D^{m-i-1} H + D^i R * D^{m-i} H. \tag{2.23}$$

Substituindo (2.21), (2.22) e (2.23) em (2.20) chegamos ao resultado desejado.

$\square$

Proposição 2.11. *Considere M uma variedade riemanniana compacta de dimensão n e $g(t)$, $t \in [0,\tau]$, uma solução do Fluxo de Ricci em M. Suponha que H é um tensor suave em M satisfazendo*

$$\frac{\partial}{\partial t}H = \Delta H + R * H.$$

Além disso, suponha que

$$\sup_M |R_{g(t)}| \leq \tau^{-1},$$

e

$$\sup_M \|H\| \leq \Lambda,$$

para todo $t \in [0,\tau]$. Então, dado qualquer inteiro $m \geq 0$, existe uma constante $C = C(m,n) > 0$, dependendo apenas de m e n, tal que

$$\sup_M \|D^m H\|^2 \leq C\Lambda^2 t^{-m},$$

para todo $t \in (0,\tau]$.

Demonstração. A demonstração será por indução sobre m. Se $m = 0$, a assertiva segue da hipótese da proposição.

Supondo a afirmação válida para todo $0 \leq k \geq m-1$, $m \geq 1$, será possível encontrar uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\sup_M \|D^k H\| \leq C_1\Lambda^2 t^{-k}, \tag{2.24}$$

para todo $0 \leq k \geq m-1$ e $t \in (o,\tau)$. Pela Proposição 2.10, é possível encontrar uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\sup_M \|D^k R\|^2 \leq C_2 t^{-k}\tau^{-2} \leq C_2 t^{-k-2}. \tag{2.25}$$

Procedendo como na demonstração da Proposição 2.10, usamos o Lema 2.2 e as desigualdades (2.24) e (2.25), para encontrar constantes $C_3, C_4 > 0$ tais que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\|D^{m-1}H\|^2) \leq (\Delta^{m-1}H) - 2\|D^m H\|^2 + C_3\Lambda^2 t^{-m} \tag{2.26}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}(\|D^m H\|^2) \leq (\Delta\|D^m H\|^2) + C_4 t^{-1}\|D^m H\|^2 + C_4\Lambda t^{\frac{-m}{2}-1}\|D^m H\|, \tag{2.27}$$

se $(x,t) \in M \times (0,\tau]$. Definindo uma função $G : M \times [0,\tau] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$G(x,t) = t^{m+1}\|D^m H\|^2 + \frac{1}{2}(C_4 + m + 2)t^m \|D^{m-1}H\|^2,$$

as desigualdes (2.26) e (2.27) nos permitirão provar que

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x,t) \leq \Delta G(x,t) + C_5 \Lambda^2,$$

para alguma constante $C_5 > 0$. Como $G(x,0) = 0$, para todo $x \in M$, segue do Princípio do Máximo escalar (cf. Teorema 1.5) que

$$G(x,t) \leq C_5 \Lambda^2 t,$$

para todo $(x,t) \in M \times [0,\tau]$. Lembrando da definição de G, temos que

$$t^{m+1}\|D^m H\|^2 \leq G(x,t) \leq C_5 \Lambda^2 t,$$

para todo $(x,t) \in M \times [0,\tau]$, de onde concluiremos que

$$\|D^m H\|^2 \leq C_5 \Lambda^2 t^{-m},$$

para todo $(x,t) \in M \times (0,\tau]$.

□

Corolário 2.5. *Considere M uma variedade riemanniana compacta de dimensão n e $g(t)$, $t \in [0,\tau]$, uma solução do Fluxo de Ricci em M. Suponha que H é um tensor suave em M satisfazendo*

$$\frac{\partial}{\partial t} H = \Delta H + R * H.$$

Além disso, suponha que

$$\sup_M |R_{g(t)}| \leq \tau^{-1},$$

e

$$\sup_M \|H\| \leq \Lambda,$$

para todo $t \in [0,\tau]$. Então, dado qualquer inteiro $m \geq 0$, existe uma constante $C = C(m,n) > 0$, dependendo apenas de m e n, tal que

$$\sup_M \|D^m H\|^2 \leq C \Lambda^2 \tau^{-m},$$

para todo $t \in (\tau/2, \tau]$.

O próximo resultado é uma importante aplicação das estimativas de Shi que permite caracterizar as soluções máximas do fluxo de Ricci:

Teorema 2.2 (Hamilton, [17]). *Considere M uma variedade riemanniana compacta e $g(t)$, $t \in [0,T)$, a solução maximal do Fluxo de Ricci em M. Suponha que $T < \infty$. Então*

$$\limsup_{t \to T} (\sup_M \|R_{g(t)}\|) = \infty.$$

Demonstração. Supondo que a afirmação do teorema é falsa, teríamos que

$$\limsup_{t \to T} (\sup_M \|R_{g(t)}\|) \leq K < \infty,$$

para alguma constante $K > 0$. Assim, utilizando o Corolário 2.4, teríamos que

$$\sup_{t \in [0,T)} \sup_M \|D^m R_{g(t)}\| < \infty,$$

para $m = 1, 2 \ldots$. Assim, se escrevemos $\omega(t) = -2\mathrm{Ric}_{g(t)}$ e consideramos o fluxo de Ricci, $\frac{\partial}{\partial t} g(t) = \omega(t)$, teremos que

$$\sup_{t \in [0,T)} \sup_M \|D^m \omega(t)\| < \infty,$$

para $m = 0, 1, 2 \ldots$. Segue do Teorema 1.3 que as métricas $g(t)$ convergem em C^∞ para uma métrica suave $g(T)$, quando $t \to T$. Como $g(T)$ é uma métrica suave, existe uma solução do fluxo de Ricci $\bar{g}(t)$, $t \in [0, \varepsilon)$, tal que $\bar{g}(0) = g(T)$.

Assim, como $g(t) \to g(T)$ suavemente, segue que

$$\tilde{g}(t) \begin{cases} g(t), & \text{se} \quad 0 \leq t < T \\ \bar{g}(t-T), & \text{se} \quad T \leq t < T + \varepsilon \end{cases}$$

é uma solução do fluxo de Ricci suave e tal que $\tilde{g}(0) = g_0$. Isto contradiz a maximilidade de T.

$\square$

Capítulo 3

O Fluxo de Ricci em $\mathbb{S}^2$

Neste capítulo, comentaremos alguns resultados devidos à Hamilton, acerca do fluxo de Ricci em superfícies com curvatura escalar positiva. Os cálculos deste capítulo serão feitos na esfera $(\mathbb{S}^2, g)$ com curvatura escalar positiva. Como veremos no decorrer do capítulo, as assertivas podem ser estentidas a qualquer superfície de característica igual à da esfera $\mathbb{S}^2$.

Teremos como resultado principal um Teorema de Hamilton ([19]) que assegura que o fluxo de Ricci na esfera converge à uma métrica de curvatura escalar constante, após um rescalonamento. O ingrediente principal para a demonstração deste teorema é a monoticidade do funcional entropia de Hamilton que será definido na seção 2.

A partir deste teorema, demonstraremos uma versão do Teorema Diferenciável da Esfera em superfícies que dirá que toda superfície compacta de curvatura seccional positiva é difeomorfa à esfera ou ao espaço projetivo. Salientamos que não faremos o uso do Teorema da Uniformização de Riemann para a demonstração deste resultado.

3.1 Sólitons de Ricci Gradiente em $\mathbb{S}^2$

O objetivo principal desta seção é demonstrar que qualquer sóliton de Ricci gradiente em $\mathbb{S}^2$ possui curvatura escalar constante. Salientamos que os resultados deste capítulo podem ser estentidos à qualquer sóliton de Ricci gradiente.

Lembre que uma variedade (M, g) é dita um sóliton de Ricci se existe uma constante ρ e um campo ξ tal que

$$\mathrm{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathscr{L}_\xi g = \rho g$$

Um sóliton de Ricci gradiente em $\mathbb{S}^2$ é um sóliton de Ricci tal que existe uma função $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ com $\xi = Df$. Observando que

$$g(D_X Df, Y) = X(g(Df, Y)) - g(Df, D_X Y) = X(Y(f)) - D_X Y(f) = D^2 f(X, Y),$$

e, portanto,

$$\mathscr{L}_{Df}g(X,Y) = g(D_X Df, Y) + g(X, D_Y Df) = 2D^2 f(X,Y),$$

vemos que num sóliton de Ricci gradiente é satisfeita a identidade

$$Ric_g + D^2 f = \rho g. \tag{3.1}$$

Observação 3.1. *Dada uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ considere π o plano gerado por $\{e_1, e_2\}$ e sua curvatura seccional*

$$K(\pi) = K_{12} = R(e_1, e_2, e_1, e_2).$$

Dados dois campos $X = X^i e_i$ e $Y = Y^j e_j$ numa variedade bidimensional M, temos

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{k=1}^{2} R(X, e_k, Y, e_k) \\ &= \sum_{k=1}^{2} X^i Y^j R(e_i, e_k, e_j, e_k) \\ &= X^i Y^j R(e_i, e_1, e_j, e_1) + X^i Y^j R(e_i, e_2, e_j, e_2) \\ &= X^2 Y^2 R(e_2, e_1, e_2, e_1) + X^1 Y^1 R(e_1, e_2, e_1, e_2) \\ &= K_{12} g(X,Y). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$scal = \sum_{k=1}^{2} Ric(e_k, e_k) = K_{12} \sum_{k=1}^{2} g(e_k, e_k) = 2K_{12}$$

Daí, $K_{12} = \frac{scal}{2}$ e portanto $Ric = \frac{scal}{2} g$.

□

Como $\mathbb{S}^2$ é uma variedade bidimensional, podemos escrever (3.1) como

$$D^2 f = \left(\rho - \frac{1}{2}\mathrm{scal}_g\right) g. \tag{3.2}$$

A partir de agora, considere $(\mathbb{S}^2, g)$ um sóliton de Ricci gradiente. Além disso, seja J qualquer estrutura complexa em $\mathbb{S}^2$, compatível com a métrica g. Isto significa que $J : TM \longrightarrow TM$ é um endomorfismo tal que $J^2 = -I$, $g(JX, JY) = g(X,Y)$ e $DJ = 0$. J age como uma rotação de 90^0.

Lema 3.1. *O campo de vetores $J\xi$ gera um grupo a 1-parâmetro de isometrias $\varphi_t : (\mathbb{S}^2, g) \longrightarrow (\mathbb{S}^2, g)$.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{J\xi}g(X,Y) &= g(D_XJ\xi,Y)+g(X,D_YJ\xi)\\
&= g((D_XJ)\xi+JD_X\xi,Y)+g(X,(D_YJ)\xi+J(D_Y\xi))\\
&= g(JD_X\xi,Y)+g(X,J(D_Y\xi))\\
&= g(J^2D_X\xi,JY)+g(JX,J^2(D_Y\xi))\\
&= -g(D_X\xi,JY)-g(JX,D_Y\xi)\\
&= -g(D_XDf,JY)-g(JX,D_YDf)\\
&= -D^2f(X,JY)-D^2f(Y,JX)\\
&= -\left(\rho-\frac{1}{2}\mathrm{scal}\right)[g(X,JY)+g(Y,JX)]\\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $g(X,JY)=g(JX,J^2Y)=-g(JX,Y)$.

Portanto, $\mathscr{L}_{J\xi}g(X,Y)=0$, o que implica que $J\xi$ é um campo de Killing. Portanto, $J\xi$ gera um grupo a 1-parâmetro de isometrias $\varphi_t:(\mathbb{S}^2,g)\longrightarrow(\mathbb{S}^2,g)$. Para mais detalhes sobre esta assertiva final consulte [27], página 251.

□

Considere p e q dois pontos críticos de f. Denote por $a=\rho-\frac{1}{2}\mathrm{scal}_g(p)$ e $b=\rho-\frac{1}{2}\mathrm{scal}_g(q)$.

Dado $v\in T_p\mathbb{S}^2$, podemos escrever

$$(d\varphi_t)_p\cdot v=\cos\theta(t)\cdot v+\mathrm{sen}\theta(t)\cdot Jv,$$

onde $\theta(t)$ é o ângulo entre $(d\varphi_t)_p\cdot v$ e v. Temos que

$$\frac{d}{dt}(d\varphi_t)_p\cdot v=\theta'(t)\cdot J[(d\varphi_t)_p\cdot v].$$

Além disso, se considerarmos V um campo tal que $V(p)=v$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(d\varphi_t)_p\cdot V &= \mathscr{L}_{-J\xi(p)}(d\varphi_t)_p\cdot V\\
&= -[(d\varphi_t)\cdot V,J\xi]|_p\\
&= D_{(d\varphi_t)_p\cdot v}J\xi-D_{J\xi(p)}(d\varphi_t)_p\cdot v\\
&= D_{(d\varphi_t)_p\cdot v}J\xi\\
&= JD_{(d\varphi_t)_p\cdot v}\xi.
\end{aligned}$$

Como $g_p(D_v\xi,v)=(D^2f)_p(v,v)=a|v|^2$, segue que $D_{(d\varphi_t)_p\cdot v}\xi=a(d\varphi_t)_p\cdot v$, donde $D_{(d\varphi_t)_p\cdot v}J\xi=aJ(d\varphi_t)_p\cdot v$. Lembrando que $\varphi(0)=\mathrm{id}$, segue que $\theta'(t)=a$ e $\theta(0)=0$. Daí concluímos que $\theta(t)=at$. Em suma temos

$$(d\varphi_t)_p\cdot v=\cos(at)\cdot v+\mathrm{sen}(at)\cdot Jv,\forall t\in\mathbb{R},\forall v\in T_p\mathbb{S}^2. \tag{3.3}$$

e, analogamente,

$$(d\varphi_t)_q \cdot v = \cos(bt) \cdot v + \text{sen}(bt) \cdot Jv, \forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in T_p\mathbb{S}^2. \tag{3.4}$$

Lema 3.2. *Considerando $t \in \mathbb{R}$ fixado, temos*

$$\frac{at}{2\pi} \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \varphi_t = id \Longleftrightarrow \frac{bt}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

Demonstração. Supondo que $\frac{at}{2\pi} \in \mathbb{Z}$, vemos por (3.3) que, dado $v \in T_p\mathbb{S}^2$,

$$(d\varphi_t)_p \cdot v = v.$$

Considerando a geodésica $\gamma(s) = exp_p(sv)$, temos que $\tilde{\gamma}(s) = \varphi_t(\exp_p(sv))$ também é uma geodésica, pois φ_t é uma isometria. Além disso,

$$\tilde{\gamma}(0) = \varphi_t(p) \;\text{ e }\; \tilde{\gamma}'(0) = \varphi_t(p) \cdot (d\exp)_0 \cdot v = (d\varphi_t)_p \cdot v.$$

Daí, $\tilde{\gamma}(s) = \exp_{\varphi_t(p)}(s(d\varphi_t)_p \cdot v)$. Portanto,

$$\varphi_t(\exp_p(v)) = \exp_{\varphi_t(p)}(d\varphi_t)_p \cdot v = \exp_p(v).$$

Como v foi escolhido arbitrariamente em $T_p\mathbb{S}^2$, segue que $\varphi_t = \text{id}$.

Reciprocamente, se $\varphi_t = \text{id}$, então $d\varphi_t \cdot v = v$, $\forall v \in T_p\mathbb{S}^2$. Utilizando (3.3), concluímos que $\frac{at}{2\pi} \in \mathbb{Z}$. A segunda equivalência segue analogamente.

□

Corolário 3.1. *Seguindo as notações fixadas anteriormente, temos que $a^2 = b^2$.*

Demonstração.

Usando o Lema 3.2, temos que se $a = 0$, então $\varphi_t = \text{id}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, $b/\pi \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$, o que implica que $b = 0$.

Suponha agora que $a, b \neq 0$. Pelo Lema 3.2 temos que $\varphi_{\frac{2\pi}{a}} = \varphi_{\frac{2\pi}{b}} = \varphi_{-\frac{2\pi}{b}} = \text{id}$. Como φ é um fluxo, segue que

$$\varphi_{\frac{2\pi(a+b)}{ab}} = \varphi_{\frac{2\pi}{a}} \circ \varphi_{\frac{2\pi}{b}} = \text{id},$$

e

$$\varphi_{\frac{2\pi(b-a)}{ab}} = \varphi_{\frac{2\pi}{a}} \circ \varphi_{-\frac{2\pi}{b}} = \text{id}.$$

Utilizando novamente o Lema 3.2, chegamos que $\frac{b-a}{b}$, $\frac{a+b}{b}$, $\frac{b-a}{a}$, $\frac{a+b}{a} \in \mathbb{Z}$. Daí,

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a^2 | b^2,$$

e

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow b^2 | a^2.$$

Logo, $a^2 = b^2$.

$\square$

Proposição 3.1. *Considere* $(\mathbb{S}^2, g)$ *um sóliton de Ricci gradiente. Então* g *possui curvatura escalar constante igual a* 2ρ.

Demonstração.

Considere $p, q \in \mathbb{S}^2$ como anteriormente. Seja $\gamma : [0, \sigma] \longrightarrow (\mathbb{S}^2, g)$ uma geodésica de velocidade unitária com $\gamma(0) = p$, $\gamma(\sigma) = q$ e $d(p, q) = \sigma$. Considere o fluxo φ_t gerado pelo campo $J\xi$. Pelo Lema 3.1, temos que φ_t é uma isometria, donde concluímos que para cada $t \in \mathbb{R}$, a curva $s \mapsto \varphi_t(\gamma(s))$ é uma geodésica de velocidade unitária.

Definamos agora um campo V ao longo de γ por

$$V(s) = \frac{\partial}{\partial s}\varphi_t(\gamma(s))\Big|_{t=0} = J\xi\Big|_{\gamma(s)},$$

com $s \in [0, \sigma]$. Como V é a restrição de uma campo de Killing à uma geodésica, segue que V é um campo de Jacobi (cf. Lema 26 em [27]). Usando que V é um campo de Jacobi, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}g(V(s), \gamma'(s)) &= g(V''(s), \gamma'(s)) \\ &= g(R(\gamma'(s), V)\gamma'(s), \gamma'(s)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim $g(V(s), \gamma'(s)) = As + B$ e $V(0) = V(\sigma) = 0$. Daí, concluímos que $g(V(s), \gamma'(s)) = 0$, $\forall s \in [0, \sigma]$. Isto significa que existe uma função suave $u : [0, \sigma] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $V(s) = u(s)J\gamma'(s)$, $\forall s \in [0, \sigma]$ e $u(0) = u(\sigma) = 0$. Como γ é uma geodésica de velocidade unitária e J é uma estrutura complexa, temos

$$\begin{aligned} g(R(\gamma', V)\gamma', V) &= u^2 g(R(\gamma', J\gamma')\gamma', J\gamma') \\ &= u^2 \frac{1}{2}\mathrm{scal}_g(\gamma(s)). \end{aligned}$$

Como V é um campo de Jacobi,

$$\begin{aligned} g(V'', V) + g(R(\gamma', V)\gamma', V) &= 0 \\ \Longrightarrow u''u|J\gamma'|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{scal} \cdot u^2 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u''(s) + \frac{1}{2}u(s)\mathrm{scal}_g(\gamma(s)) = 0, \quad \forall s \in [0, \sigma]. \tag{3.5}$$

Por outro lado, observando que

$$g(\xi|_{\gamma(s)}, \gamma'(s)) = g(V(s), J\gamma'(s)) = u(s), \quad \forall s \in [0, \sigma],$$

diferenciamos esta identidade com respeito a s e obtemos

$$(D^2 f)_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)) = u'(s).$$

Utilizando (3.3) e levando em conta que γ tem velocidade unitária, temos

$$\rho - \frac{1}{2}\mathrm{scal}_g(\gamma(s)) = u'(s). \tag{3.6}$$

Substituindo (3.6) em (3.5), teremos

$$u''(s) + \rho u(s) = u(s)u'(s). \tag{3.7}$$

A identidade (3.6) também implica que

$$a = \rho - \frac{1}{2}\mathrm{scal}_g(p) = u'(0)$$

e

$$b = \rho - \frac{1}{2}\mathrm{scal}_g(q) = u'(\sigma).$$

Pelo Corolário 3.1 temos que $a^2 = b^2$. Assim, $u'(0)^2 = u'(\sigma)^2$. Segue de (3.7) que

$$\int_0^\sigma u(s)u'(s)^2 ds = \frac{1}{2}(u'(\sigma)^2 - u'(0)^2) + \frac{1}{2}\rho(u(\sigma)^2 - u(0)^2) = 0.$$

Isto implica que existe $s_0 \in (0, \sigma)$ tal que $u(s_0) = 0$. Como γ é livre de pontos conjugados (cf. o Teorema 10.15 de [22]), segue que $u(s) = 0$ para todo $s \in [0, \sigma]$. Em particular, $a = u'(0) = 0$ e $b = u'(\sigma) = 0$. Pelo Lema 3.1 concluímos que $\varphi_t = \mathrm{id}, \forall t \in \mathbb{R}$. Assim

$$J\xi(p) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = 0, \forall p \in \mathbb{S}^2$$

de onde concluímos que f é constante e $\mathrm{scal}_g = 2\rho$.

□

3.2 O Funcional Entropia de Hamilton

No que segue nesta seção, considere g_0 uma métrica em $\mathbb{S}^2$ com curvatura escalar positiva e $g(t)$, $t \in [0, T)$, a única solução maximal para o fluxo de Ricci com métrica inicial g_0. Por conveniência, assumiremos que $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2, g_0) = 8\pi$.

Lema 3.3. *Segundo as condições acima impostas, temos que Vol*$(\mathbb{S}^2, g(t)) = 8\pi(1 - t)$. *Em particular,* $T \leq 1$.

Demonstração. Pelo Teorema de Gauss-Bonnet em $\mathbb{S}^2$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^2} K_{12} d\mathrm{Vol} &= 2\pi\chi(\mathbb{S}^2)\\
\Longrightarrow \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{2}\mathrm{scal}_g d\mathrm{Vol} &= 4\pi\\
\Longrightarrow \int_{\mathbb{S}^2} \mathrm{scal}_g d\mathrm{Vol} &= 8\pi.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2, g(t)) = \int_{\mathbb{S}^2} d\mathrm{Vol}_{g(t)} = \int_U \sqrt{detg(t)}dudv,$$

onde U é domínio para uma para uma parametrização de $\mathbb{S}^2$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2, g(t)) &= \int_U \frac{1}{2\sqrt{\det g(t)}}\frac{d}{dt}(\det g(t))dudv\\
&= \int_U \frac{1}{2\sqrt{\det g(t)}}\mathrm{tr}(g^{-1}(t)\cdot g'(t))\det g(t)dudv\\
&= \int_U \frac{1}{2}\mathrm{tr}(g^{-1}(t)\cdot -2\mathrm{Ric}_{g(t)})\sqrt{\det g(t)}dudv\\
. &= \int_U -\mathrm{tr}(g^{-1}(t)\cdot \mathrm{Ric}_{g(t)})\sqrt{\det g(t)}dudv\\
&= -\int_{\mathbb{S}^2} \mathrm{scal}_{g(t)} d\mathrm{Vol}_{g(t)}\\
&= -8\pi.
\end{aligned}$$

Assim, $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2, g(t)) = -8\pi t + C$. Para finalizar, como $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2, g(0)) = 8\pi$, concluímos que $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2, g(t)) = 8\pi(1-t)$.

□

A seguir, definiremos o funcional entropia de Hamilton e provaremos a sua monoticidade.

Definição 3.1. *Fixado $t \in [0, T)$, a entropia de $g(t)$ é definida por*

$$\mathcal{E}(t) := \int_{\mathbb{S}^2} scal \cdot \log(scal) d\,Vol + 8\pi\log(1-t)$$

Lema 3.4. *Temos que $\mathcal{E}(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, T)$.*

Demonstração.

Observando que a função $g(x) = x\log(x) - x + 1$, $x > 0$, tem valor mínimo em $x = 1$, temos a seguinte estimativa pontual

$$(1-t)\text{scal}\cdot\log((1-t)\text{scal}) \geq (1-t)\text{scal}-1.$$

Observando que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &= \int_{\mathbb{S}^2} \text{scal}\cdot\log(\text{scal})d\text{Vol} + 8\pi\log(1-t) \\
&= \int_{\mathbb{S}^2} \text{scal}\cdot\log(\text{scal})d\text{Vol} + \int_{\mathbb{S}^2} \text{scal}\cdot\log(1-t)d\text{Vol} \\
&= \int_{\mathbb{S}^2} \text{scal}\cdot\log((1-t)\text{scal})d\text{Vol},
\end{aligned}$$

temos, usando o Teorema de Gauss-Bonnet e o lema anterior,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &\geq \int_{\mathbb{S}^2} \text{scal} - \frac{1}{1-t}d\text{Vol} \\
&= \int_{\mathbb{S}^2} \text{scal}d\text{Vol} - \frac{1}{1-t}\text{Vol}(S^2, g(t)) \\
&= 8\pi - \frac{1}{1-t}8\pi(1-t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

Fixado $t \in [0, T)$, o Teorema de Existência para o problema de Dirichlet implica que existe uma função suave $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, única a menos de adição de uma constante, tal que

$$\Delta f = \frac{1}{1-t} - \text{scal}. \tag{3.8}$$

Pudemos usar este Teorema de Existência porque $\int_{\mathbb{S}} \left[\frac{1}{1-t} - \text{scal}_{g(t)}\right] d\text{Vol}_{g(t)}=0$.
Denote por M o traço livre da Hessiana de f, isto é,

$$M = D^2 f - \frac{1}{2}(\Delta f)g. \tag{3.9}$$

Ainda, para cada $t \in [0, T)$, definamos

$$\mathcal{M}(t) = \int_{S^2} |M|^2 d\text{Vol}. \tag{3.10}$$

Lema 3.5. *Para cada $t \in [0, T)$, temos*

$$\int_{\mathbb{S}^{\neq}} \frac{1}{scal}|dscal|^2 dVol \geq \int_{\mathbb{S}^2} (\Delta f)^2 dVol + 2\mathcal{M}(t)$$

Demonstração.

Inicialmente, lembre do Teorema de Stokes

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^2} (\Delta f)^2 d\mathrm{Vol} &= -\int_{\mathbb{S}^2} g(d(\Delta f), df) d\mathrm{Vol} \\ &= -\int_{\mathbb{S}^2} g\left(d\left(\frac{1}{1-t} - \mathrm{scal}\right), df\right) d\mathrm{Vol} \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} g(d\mathrm{scal}, df) d\mathrm{Vol}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\mathrm{scal}} |d\mathrm{scal}|^2 d\mathrm{Vol} - 2\int_{\mathbb{S}^2} (\Delta f)^2 d\mathrm{Vol} + \int_{\mathbb{S}^2} \mathrm{scal}|df|^2 d\mathrm{Vol} \\ =\ & \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\mathrm{scal}} |d\mathrm{scal}|^2 d\mathrm{Vol} - 2\int_{\mathbb{S}^2} g(d\mathrm{scal}, df) d\mathrm{Vol} + \int_{\mathbb{S}^2} \mathrm{scal}|df|^2 d\mathrm{Vol} \\ =\ & \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\mathrm{scal}} |d\mathrm{scal} - \mathrm{scal} df|^2 d\mathrm{Vol} \\ \geq\ & 0,\end{aligned}$$

pois como $\mathrm{scal}_{g(0)} \geq 0$, então $\mathrm{scal}_{g(t)} \geq 0$, $\forall t \in [0, T)$. Segue da Fórmula de Böchner (ver [12] página 23), que

$$2\int_{\mathbb{S}^2} (\Delta f)^2 d\mathrm{Vol} - \int_{\mathbb{S}^2} \mathrm{scal}|df|^2 d\mathrm{Vol} = 2\int_{\mathbb{S}^2} |D^2 f|^2 d\mathrm{Vol}.$$

Unindo as desigualdades anteriores, temos

$$\int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\mathrm{scal}} |d\mathrm{scal}|^2 d\mathrm{Vol} \geq 2\int_{\mathbb{S}^2} |D^2 f|^2 d\mathrm{Vol}.$$

Observando que

$$g(M, g) = g^{il} g^{jk} M_{ij} g_{lk} = \delta^i_k g^{jk} M_{ij} = g^{jk} M_{kj} = tr(M) = 0,$$

chegamos que $|D^2 f|^2 = |M|^2 + \frac{\Delta f}{2}$, de onde se conclui a desigualdade almejada.

□

Proposição 3.2. *Temos que* $\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) \leq -2\mathcal{M}(t)$. *Em particular, a função* $t \mapsto \mathcal{E}(t)$ *é decrescente.*

Demonstração.

Como já foi visto na seção 2 do Capítulo 2, a curvatura escalar de $g(t)$ evolui pelo fluxo de Ricci em $\mathbb{S}^2$ pela equação

$$\frac{d}{dt}\mathrm{scal} = \Delta\mathrm{scal} + \mathrm{scal}^2.$$

Assim, se U é um aberto, domínio para uma parametrização de $\mathbb{S}^2$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) &= \int_U \frac{d}{dt}[\mathrm{scal}\cdot\log(\mathrm{scal})\sqrt{\det g(t)}]dudv + \frac{d}{dt}(8\pi\log(1-t))\\
&= \int_U (\Delta\mathrm{scal} + \mathrm{scal}^2)\log(\mathrm{scal})\sqrt{\det g(t)}dudv + \int_U (\Delta\mathrm{scal} + \mathrm{scal}^2)\sqrt{\det g(t)}dudv\\
&\quad - \int_U \mathrm{scal}\cdot\log(\mathrm{scal})\mathrm{scal}\sqrt{\det g(t)}dudv - \frac{8\pi}{1-t}\\
&= \int_{\mathbb{S}^2} \Delta\mathrm{scal}[\log(\mathrm{scal})+1]d\mathrm{Vol} + \int_{\mathbb{S}^2} \mathrm{scal}^2 d\mathrm{Vol} - \frac{8\pi}{1-t}\\
&= -\int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\mathrm{scal}}|d\mathrm{scal}|^2 d\mathrm{Vol} + \int_{\mathbb{S}^2} \mathrm{scal}^2 dVol - \frac{8\pi}{1-t},
\end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos o teorema de Stokes. Além disso, utilizando o Teorema de Gauss-Bonnet e o Lema 3.3, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^2} (\Delta f)^2 d\mathrm{Vol} &= \int_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{1}{1-t^2}\right)d\mathrm{Vol} - \int_{\mathbb{S}^2}\frac{2\mathrm{scal}}{1-t}d\mathrm{Vol} + \int_{\mathbb{S}^2}\mathrm{scal}^2 d\mathrm{Vol}\\
&= \left(\frac{1}{1-t}\right)^2 8\pi(1-t) - \frac{2}{1-t}8\pi + \int_{\mathbb{S}^2}\mathrm{scal}^2 d\mathrm{Vol}\\
&= -\frac{8\pi}{1-t} + \int_{S^2}\mathrm{scal}^2 d\mathrm{Vol}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) &= -\int_{\mathbb{S}^2}\frac{1}{\mathrm{scal}}|d\mathrm{scal}|^2 d\mathrm{Vol} + \int_{\mathbb{S}^2}\mathrm{scal}^2 d\mathrm{Vol} - \frac{8\pi}{1-t}\\
&= -\int_{\mathbb{S}^2}\frac{1}{\mathrm{scal}}|d\mathrm{scal}|^2 d\mathrm{Vol} + \int_{\mathbb{S}^2}(\Delta f)^2 d\mathrm{Vol}.
\end{aligned}$$

Desta igualdade e do Lema 3.5, segue a proposição.

□

Observação 3.2. *Numa variedade bidimensional temos*

$$
\begin{aligned}
|R|^2 &= \sum_{i,j,k,l=1}^{2} R_{ijkl}^2 \\
&= \sum_{j,k,l=1}^{2} R_{1jkl}^2 + \sum_{j,k,l=1}^{2} R_{2jkl}^2 \\
&= \sum_{k,l=1}^{2} R_{12kl}^2 + \sum_{k,l=1}^{2} R_{21kl}^2 \\
&= \sum_{l=1}^{2} R_{121l}^2 + \sum_{l=1}^{2} R_{212l}^2 + \sum_{l=1}^{2} R_{121l}^2 + \sum_{l=1}^{2} R_{212l}^2 \\
&= R_{1212}^2 + R_{2121}^2 + R_{1212}^2 + R_{2121}^2 \\
&= 4R_{1212}^2 = 4K_{12}^2 = scal^2.
\end{aligned}
$$

Em particaular, em S^2 temos que $|R_{g(t)}| = |scal_{g(t)}|$.

Proposição 3.3. *Temos que $T = 1$ e*

$$\sup_{t\in[0,1)} \left[(1-t)\sup_{\mathbb{S}^2} scal_{g(t)}\right] < \infty \tag{3.11}$$

Demonstração.

Mostraremos inicialmente, que se $[0,T)$ é o intervalo máximo onde está definido o fluxo de Ricci em $\mathbb{S}^2$, com condição inicial g_0, temos

$$\sup_{t\in[0,T)} \left[(1-t)\sup_{\mathbb{S}^2} \mathrm{scal}_{g(t)}\right] < \infty \tag{3.12}$$

Supondo que (3.12) é falso, é possível definir uma sequência de tempos $t_k \in [0,T)$ por

$$t_k = \inf\left\{t \in [0,T); (1-t)\sup_{\mathbb{S}^2} \mathrm{scal}_{g(t)} \geq 2k\right\}.$$

Escolha k suficientemente grande de forma que $t_k > 0$. Como $\mathbb{S}^2$ é compacta e scal é contínua, para cada k podemos escolher $p_k \in \mathbb{S}^2$ tal que

$$\mathrm{scal}_{g(t_k)}(p_k) = \sup_{\mathbb{S}^2} \mathrm{scal}_{g(t_k)} = \frac{2k}{1-t_k}.$$

Segue do Corolário 2.4 das estimativas de Shi e da Observação 3.2, que existe uma constante uniforme $N \geq 1$ tal que

$$\sup_{\mathbb{S}^2} |d\mathrm{scal}_{g(t_k)}|^2 \leq N\left(\frac{k}{1-t_k}\right)^3,$$

para todo k. Definamos agora as bolas

$$\Omega_k := B\left(p_k, \sqrt{\frac{1-t_k}{Nk}}\right) = \left\{x \in \mathbb{S}^2; d_{g(t_k)}(p_k, x) \leq \sqrt{\frac{1-t_k}{Nk}}\right\}.$$

Segue da Lipschitz-continuidade de scal que, se tomamos $x \in \Omega_k$,

$$\begin{aligned} |\mathrm{scal}_{g(t_k)}(p_k) - \mathrm{scal}_{g(t_k)}(x)| &\leq |d\mathrm{scal}_{g(t_k)}| d(p_k, x) \\ &\leq N^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{1-t_k}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1-t_k}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{k}{1-t_k}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\inf_{x \in \Omega_k} \mathrm{scal}_{g(t_k)}(x) \geq \mathrm{scal}_{g(t_k)}(p_k) - \frac{k}{1-t_k} = \frac{k}{1-t_k}.$$

Daí,

$$\int_{\Omega_k} \mathrm{scal}_{g(t_k)} \log[(1-t_k)\mathrm{scal}_{g(t_k)}] d\mathrm{Vol}_{g(t_k)} \geq \frac{k \log k}{1-t_k} \mathrm{Vol}(\Omega_k, g(t_k)). \tag{3.13}$$

Lembrando que $\mathrm{scal}_{g(t_k)} \geq 0$ e $0 < t_k \leq 1$, $\forall k$, conseguimos a estimativa pontual

$$(1-t_k)\mathrm{scal}_{g(t_k)} \log((1-t_k)\mathrm{scal}_{g(t_k)}) \geq (1-t_k)\mathrm{scal}_{g(t_k)} - 1 \geq -1,$$

de onde obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^2/\Omega_k} \mathrm{scal}_{g(t_k)} \log((1-t_k)\mathrm{scal}_{g(t_k)}) d\mathrm{Vol}_{g(t_k)} \geq -\frac{1}{1-t_k} \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2/\Omega_k, g(t_k)) \geq -8\pi. \tag{3.14}$$

Adicionando (3.13) e (3.14), obtemos

$$\mathcal{E}(t_k) = \int_{\mathbb{S}^2} \mathrm{scal}_{g(t_k)} \log((1-t_k)\mathrm{scal}_{g(t_k)}) d\mathrm{Vol}_{g(t_k)} \geq -\frac{k \log k}{1-t_k} \mathrm{Vol}(\Omega_k, g(t_k)) - 8\pi. \tag{3.15}$$

Como $\mathrm{scal}_{g(t_k)} \geq 0$ para todo k e $\mathbb{S}^2$ é uma variedade bidimensional, segue de um teorema de Kligenberg (cf. [11], página 98) que o raio de injentividade de $(\mathbb{S}^2, g(t_k))$ é limitado por

$$\mathrm{inj}(\mathbb{S}^2, g(t_k)) \geq \pi \sqrt{\frac{1-t_k}{k}}.$$

Pelo Teorema de Comparação de Volume de Günther e Bishop (cf. Teorema 1.1 do Capítulo 1), temos

$$\mathrm{Vol}(\Omega_k) \geq V_{\frac{k}{1-t_k}}\left(\sqrt{\frac{1-t_k}{Nk}}\right),$$

onde $V_\delta(r)$ denota o volume de uma bola de raio r numa variedade M com curvatura seccional constante igual a δ. Explicitamente,

$$\begin{aligned} V_\delta(r) &= 2\pi\int_0^r \frac{\mathrm{sen}(\sqrt{\delta}s)}{\delta}ds \\ &= 2\pi\left(-\frac{\cos\sqrt{\delta}r}{\delta}+\frac{1}{\delta}\right). \end{aligned}$$

Substituindo temos

$$\begin{aligned} V_{\frac{k}{1-t_k}}\left(\sqrt{\frac{1-t_k}{Nk}}\right) &= 2\pi\left(\frac{-\cos\sqrt{\frac{k}{1-t_k}}\sqrt{\frac{1-t_k}{Nk}}}{\delta}+\frac{1}{\delta}\right) \\ &= \frac{2\pi}{\delta}\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{1}{N}}\right)\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{k}{1-t_k}\mathrm{Vol}(\Omega_k) \geq 2\pi\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{1}{N}}\right)\right) > 0,$$

pois $N \geq 1$. Como a desigualdade vale para todo k, temos

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{1-t_k}\mathrm{Vol}(\Omega_k g(t_k)) > 0. \tag{3.16}$$

Segue de (3.15) e (3.16) que $\mathcal{E}(t_k) \to \infty$ quando $k \to \infty$. Isto contradiz a Proposição 3.2. Daí concluímos a assertiva (3.12).

Para finalizar a demonstração, mostraremos que $T = 1$. De (3.12), temos que

$$\sup_{\mathbb{S}^2}\mathrm{scal}_{g(t)} \geq \frac{C}{1-t}, \tag{3.17}$$

onde $t \in [0, T)$ é qualquer e C é uma constante positiva.

Utilizando o Teorema 2.2 e relembrando a Observação 3.2, vemos que se $[0, T)$ é o intervalo máximo de definição do fluxo de Ricci, temos

$$\limsup_{t\to T}(\sup_{\mathbb{S}^2}\mathrm{scal}_{g(t)}) = +\infty. \tag{3.18}$$

De (3.17) e (3.18), temos

$$\limsup_{t \to T} \frac{C}{1-t} = \infty,$$

de onde se conclui que $T = 1$.

$\square$

Proposição 3.4. *As métricas $\tilde{g}(t) = \frac{1}{1-t} g(t)$ possuem as seguintes propriedades:*

(i) *A curvatura escalar de $(\mathbb{S}^2, \tilde{g}(t))$ é uniformemente limitada para todo $t \in [0, 1)$, bem como suas derivadas covariantes de ordem superior;*

(ii) *O raio de injetividade de $(\mathbb{S}^2, \tilde{g}(t))$ é uniformemente limitado por baixo para todo $t \in [0, 1)$;*

(iii) *O diâmetro de $(\mathbb{S}^2, \tilde{g}(t))$ é uniformemente limitado por cima para todo $t \in [0, 1)$.*

Demonstração.

(i) Segue da Proposição 3.3 que

$$\sup_{t \in [0,1)} \left[(1-t) \sup_{\mathbb{S}^2} \mathrm{scal}_{g(t)} \right] < \infty.$$

Como $|R_{g_t}| = |\mathrm{scal}_{g_t}|$, segue do Corolário 2.4 que

$$\sup_{t \in [0,1)} \left[(1-t)^{m+2} \sup_{\mathbb{S}^2} |D^m \mathrm{scal}_{g(t)}|^2 \right] < \infty.$$

Como $\mathrm{scal}_{\tilde{g}_t} = (1-t)\mathrm{scal}_{g_t}$, a assertiva segue.

(ii) Segue de (**i**) e da Estimativa do raio de injetividade de Kligenberg.

(iii) Suponha, por absurdo, que exista uma sequência de tempos $t_k \in [0, 1)$ tais que

$$\mathrm{diam}(\mathbb{S}^2, \tilde{g}(t_k)) \geq k,$$

para todo k. Para cada k considere uma geodésica de velocidade unitária $\gamma_k : [0, k] \longrightarrow (\mathbb{S}^2, \tilde{g}(t_k))$, tal que $d_{\tilde{g}(t_k)}(\gamma_k(0), \gamma_k(k)) = k$. Agora nós definimos as bolas

$$\Omega_{i,k} = \left\{ s \in \mathbb{S}^2; d_{\tilde{g}(t_k)}(\gamma_k(i), x) \leq \frac{1}{4} \right\},$$

para $i = 0, 1, \ldots k$. Pelos itens anteriores, vimos que a curvatura escalar de $(\mathbb{S}^2, \tilde{g}(t_k))$ é uniformemente limitada por cima e o raio de injetividade de $(\mathbb{S}^2, \tilde{g}(t_k))$ é uniformemente limitado por baixo. Segue da estimativa de volume de Günther e Bishop que

$$\min_{i=0,1,\ldots,k} \mathrm{Vol}(\Omega_{i,k}, \tilde{g}(t_k)) \geq \varepsilon(k+1),$$

para algum ε independente de k. Os conjuntos $\Omega_{i,k}$ são disjuntos pois

$$\begin{aligned}
& x \in \Omega_{i,k} \cap \Omega_{j,k} \\
\Longrightarrow\ & d_{\tilde{g}(t_k)}(\gamma_k(i), x) \leq \frac{1}{4} \ \text{ e } \ d_{\tilde{g}(t_k)}(\gamma_k(j), x) \leq \frac{1}{4} \\
\Longrightarrow\ & i - j = d_{\tilde{g}(t_k)}(\gamma_k(i), \gamma_k(j)) \leq \frac{1}{2} \\
\Longrightarrow\ & i = j.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2, \tilde{g}(t_k)) \geq \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}(\Omega_{i,k}, \tilde{g}(t_k)) \geq \varepsilon(k+1)$$

Por outro lado, pelo Lema 3.3, $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2, \tilde{g}(t_k)) = 8\pi$, $\forall k$. Se tomarmos k suficientemente grande chegamos a uma contradição. Isto conclui a demonstração.

□

Proposição 3.5. *Temos que*

$$\sup_{\mathbb{S}^2} |(1-t)scal_{g(t)} - 1| = 0, \quad \textit{quando} \ \ t \to 1.$$

Demonstração. Se a assertiva acima fosse falsa, seria possível encontrar um número $\varepsilon \in (0, 1/2)$ e uma sequância de tempos $\tau_k \in [1/2, 1)$ tal que $\lim_{k\to\infty} \tau_k = 1$ e

$$\sup_{\mathbb{S}^2} |(1-\tau_k)\mathrm{scal}_{g(\tau_k)} - 1| > \varepsilon, \tag{3.19}$$

para todo k.

A continuidade da função $\mathcal{M}(t)$, definida em (3.10), permite que para cada k escolhamos um número real $t_k \in [2\tau_k - 1, \tau_k]$, tal que $\mathcal{M}(t_k) = \inf_{t\in[2\tau_k-1,\tau_k]} \mathcal{M}(t)$. Isto implica que

$$0 \leq (1-t_k)\mathcal{M}(t_k) \leq 2(1-\tau_k)\mathcal{M}(t_k) \leq \int_{2\tau_k-1}^{\tau_k} \mathcal{M}(t)dt,$$

para todo k. Segue do Lema 3.4 e da Proposição 3.2 que $\int_0^1 \mathcal{M}(t)dt < \infty$, de onde obtemos

$$\lim_{k\to\infty} (1-t_k)\mathcal{M}(t_k) \to 0. \tag{3.20}$$

Pelas conclusões tiradas na Proposição 3.4, podemos utilizar o Teorema de Compacidade de Gromov (cf. Teorema 6.9 de [32]), para garantir que após passar a uma subsequência, se necessário, as métricas $\tilde{g}(t_k) = g(t_k)/(1-t_k)$ convergem no sentido de Cheeger-Gromov para uma métrica suave $\bar{g}$ em $\mathbb{S}^2$.

Usando as fórmulas de rescalonamento de métricas para $\tilde{g}(t_k) = g(t_k)/(1-t_k)$, e lembrando (3.9), temos

$$\begin{aligned} M_{g(t_k)} &= \frac{1}{2}\mathscr{L}_{Df}g(t_k) + \frac{1}{2}\mathrm{scal}g(t_k) - \frac{1}{2(1-t)}g(t_k) \\ &= \frac{1}{2}(1-t_k)\mathscr{L}_{\frac{1}{1-t_k}\tilde{D}f}\frac{g(t_k)}{1-t_k} + \mathrm{Ric}_{g(t_k)} - \frac{1}{2}\tilde{g}(t_k) \\ &= \frac{1}{2}\mathscr{L}_{\tilde{D}f}\tilde{g}(t_k) + \mathrm{Ric}_{\tilde{g}(t_k)} - \frac{1}{2}\tilde{g}(t_k), \end{aligned}$$

onde $\tilde{D}$ e $Ric_{\tilde{g}(t_k)}$ representam, respectivamente, a Conexão de Levi-Civita e o tensor de Ricci de $\tilde{g}(t_k)$. Por isto, temos

$$M_{\bar{g}} = \lim_{k\to\infty} M_{g(t_k)} = \frac{1}{2}\mathscr{L}_{\bar{D}f}\bar{g} + \mathrm{Ric}_{\bar{g}} - \frac{1}{2}\bar{g}, \tag{3.21}$$

onde $\bar{D}$ e $\mathrm{Ric}_{\bar{g}}$ representam, respectivamente, a Conexão de Levi-Civita e o tensor de Ricci de $\bar{g}$. Além do mais,

$$\begin{aligned} |M|^2_{\tilde{g}(t)} &= \left(\frac{g(t)}{1-t}\right)^{ik}\left(\frac{g(t)}{1-t}\right)^{jl} M_{ij}M_{kl} \\ &= (1-t)^2 g(t)^{ik} g(t)^{jl} M_{ij}M_{kl} \\ &= (1-t)^2 |M|^2_{g(t)}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} (1-t_k)\mathcal{M}(t_k) &= (1-t_k)\int_{\mathbb{S}^2} |M_{g(t_k)}|^2_{g(t_k)} d\mathrm{Vol}_{g(t_k)} \\ &= (1-t_k)^2 \int_{\mathbb{S}^2} |M_{g(t_k)}|^2_{g(t_k)} d\mathrm{Vol}_{\tilde{g}(t_k)} \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} |M_{g(t_k)}|^2_{\tilde{g}(t_k)} d\mathrm{Vol}_{\tilde{g}(t_k)}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k\to\infty}(1-t_k)\mathcal{M}(t_k) \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{S}^2} |M_{g(t_k)}|^2_{\tilde{g}(t_k)} d\mathrm{Vol}_{\tilde{g}(t_k)} \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} |M_{\bar{g}}|^2_{\bar{g}} d\mathrm{Vol}_{\bar{g}}. \end{aligned}$$

Isto implicará que $M_{\bar{g}} = 0$, e utilizando (3.21) segue que $(\mathbb{S}^2, \bar{g})$ é um sóliton gradiente de Ricci, pois

$$\bar{D}^2 f = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{scal}_{\bar{g}}\right)\bar{g}.$$

Além do mais, a Proposição 3.1 implicará que $(\mathbb{S}^2, \bar{g})$ possui curvatura escalar constante igual a 1, e, por conseguinte, $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2, \bar{g}) = 8\pi$.

Como $\mathrm{scal}_{\bar{g}(t_k)} = (1-t_k)\mathrm{scal}_{g(t_k)}$ e $\varepsilon < 1/2$, segue que, para k é suficientemente grande e cada ponto de $\mathbb{S}^2$,

$$-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq (1-t_k)\mathrm{scal}_{g(t_k)} - 1 \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

donde,

$$\frac{1-2\varepsilon}{(1-\varepsilon)(1-t_k)} \leq \mathrm{scal}_{g(t_k)} \leq \frac{1+2\varepsilon}{(1+\varepsilon)(1-t_k)}.$$

Como $\frac{d}{dt}\mathrm{scal} = \Delta\mathrm{scal} + \mathrm{scal}^2$, podemos usar o Princípio do Máximo e do Mínimo escalar junto com as desigualdades acima para garantir que

$$\frac{1-2\varepsilon}{(1-2\varepsilon)(1-\tau_k)+\varepsilon(1-t_k)} \leq \mathrm{scal}_{g(\tau_k)} \leq \frac{1+2\varepsilon}{(1+2\varepsilon)(1-\tau_k)-\varepsilon(1-t_k)},$$

para qualquer pontos de $\mathbb{S}^2$. Como $1-t_k \leq 2(1-\tau_k)$, concluímos que

$$\frac{1-2\varepsilon}{1-\tau_k} \leq \mathrm{scal}_{g(\tau_k)} \leq \frac{1+2\varepsilon}{1-\tau_k},$$

para qualquer pontos de $\mathbb{S}^2$. Como esta última assertiva contradiz (3.19), encontramos um absurdo. Este absurdo conclui a demonstração da proposição.

$\square$

3.3 Convergência para uma métrica de curvatura constante

Como feito previamente, suponha que g_0 é uma métrica Riemanniana em $\mathbb{S}^2$ com curvatura escalar positiva e $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2, g_0) = 8\pi$. Ainda mais, denote por $g(t)$, $t \in [0, T)$, a única solução maximal do Fluxo de Ricci com $g(0) = g_0$.

Lema 3.6. *Considerando f a função potencial definida em* (3.8)*, isto é,*

$$\Delta f = \frac{1}{1-t} - scal,$$

temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \Delta f + \frac{1}{1-t} f + C, \tag{3.22}$$

onde C é constante em relação ao espaço.

Demonstração. Inicialmente, note que se $g(t)$ é uma solução do Fluxo de Ricci e h é uma função espacial suave, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_{g(t)} h) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij} h_{ij}\right) \\
&= \mathrm{scal} g^{ij} h_{ij} \\
&= \mathrm{scal} \Delta h.
\end{aligned}$$

Assim, utilizando (3.8), temos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_{g(t)} f) = \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{scal}.$$

Isto implica que

$$\mathrm{scal}\Delta f + \Delta\left(\frac{\partial}{\partial t} f\right) = \frac{1}{(1-t)^2} - \Delta\mathrm{scal} - \mathrm{scal}^2.$$

Utilizando novamente (3.8), temos

$$\frac{\mathrm{scal}}{1-t} - \mathrm{scal}^2 + \Delta\left(\frac{\partial}{\partial t} f\right) = \frac{1}{(1-t)^2} + \Delta\Delta f - \mathrm{scal}^2.$$

Mais uma vez por (3.8),

$$-\frac{\Delta f}{1-t} + \Delta\left(\frac{\partial}{\partial t} f\right) = \Delta\Delta f,$$

de onde vemos que

$$\Delta\left(\frac{\partial}{\partial t} f - \Delta f - \frac{1}{1-t} f\right) = 0.$$

Denotando por $C = C(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} f - \Delta f - \frac{1}{1-t} f$, utilizamos o Teorema de Stokes para ver que

$$0 = \int_{\mathbb{S}^2} C\Delta C d\mathrm{Vol} = -\int_{\mathbb{S}} |\nabla C|^2 d\mathrm{Vol}.$$

Daí C é constante em relação ao espaço. Disto, concluímos (3.22).

□

Lema 3.7. *Para todos campos X, Y em $\mathbb{S}^2$, temos que*

$$\begin{aligned}(\Delta D^2 f)(X,Y) &= D^2_{X,Y}(\Delta f) + 2scal \cdot M(X,Y) + \frac{1}{2}X(scal)Y(f)\\ &\quad + \frac{1}{2}Y(scal)X(f) - \frac{1}{2}g(df, dscal)g(X,Y),\end{aligned}$$

Demonstração. Por questão de abreviação, escreva $\overline{M} = D^2 f$. Considere $p \in \mathbb{S}^2$ e $\{e_i\}$ um referencial ortonormal de $T_p\mathbb{S}^2$. Lembre das identidades

(1) $D_k(f_{ij}) = D_i f_{kj} - \sum_{p=1}^{n} R_{kijp} D_p f$;

(2) $D_l D_k f_{ij} = D_k D_l f_{ij} - \sum_{p=1}^{n} R_{lkip} f_{pj} - \sum_{p=1}^{n} R_{lkjp} f_{ip}$ (Identidade de Ricci);

(3) $R_{ijkl} = K_{12}(\delta_{il}\delta_{kj} - \delta_{ik}\delta_{jl})$ em $\mathbb{S}^2$, onde K_{12} é a curvatura seccional de $\mathbb{S}^2$.

Temos que

$$\begin{aligned}D_k D_k f_{ij} &= D_k\left(D_i f_{kj} - \sum_{p=1}^{n} R_{kijp} D_p f\right)\\ &= D_k D_i f_{kj} - \sum_{p=1}^{n} D_k(R_{kijp}) D_p f - \sum_{p=1}^{n} R_{kijp} f_{pk}\\ &= D_i D_k f_{kj} - \sum_{p=1}^{n} R_{kikp} f_{pj} - R_{kijp} f_{pk} - \sum_{p=1}^{n} D_k(R_{kijp}) D_p f - \sum_{p=1}^{n} R_{kijp} f_{pk}\\ &= D_i(D_j f_{kk} - \sum_{p=1}^{n} R_{kjkp} D_p f) - R_{kikp} f_{pj}\\ &\quad - \sum_{p=1}^{n} R_{kijp} f_{pk} - \sum_{p=1}^{n} D_k(R_{kijp}) D_p f - \sum_{p=1}^{n} R_{kijp} f_{pk}\\ &= D_i D_j f_{kk} - \sum_{p=1}^{n} D_i(R_{kjkp}) D_p f - \sum_{p=1}^{n} R_{kjkp} f_{pi} - \sum_{p=1}^{n} R_{kikp} f_{pj} - R_{kijp} f_{pk}\\ &\quad - \sum_{p=1}^{n} D_k(R_{kijp}) D_p f - \sum_{p=1}^{n} R_{kijp} f_{pk}.\end{aligned}$$

Somando de $k = 1$ até n na expressão acima, temos

$$
\begin{aligned}
(\Delta\overline{M})_{ij} &= D_iD_j(\Delta f) + \sum_{p=1}^{n} D_i(\mathrm{Ric}_{jp})D_pf - \sum_{k,p=1}^{n} D_k(R_{kijp})D_pf \\
&\quad -2\sum_{k,p=1}^{n} R_{kijp}f_{pk} + \sum_{p=1}^{n}(\mathrm{Ric}_{jp}f_{pi} + \mathrm{Ric}_{ip}f_{pj}) \\
&= (\Delta f)_{ij} + \sum_{p=1}^{n} D_i\left(\frac{1}{2}\mathrm{scal}\delta_{jp}\right)D_pf + \sum_{k,p=1}^{n}(D_jR_{pkki} + D_pR_{kjki})D_pf \\
&\quad -2\sum_{k,p=1}^{n} R_{kijp}f_{pk} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\mathrm{scal}\delta_{jp}f_{pi} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\mathrm{scal}\delta_{ip}f_{pj} \\
&= (\Delta f)_{ij} + \frac{1}{2}D_i\mathrm{scal}D_jf + \sum_{p=1}^{n}[D_j(\mathrm{Ric}_{pi}) - D_p(\mathrm{Ric}_{ij})]D_pf \\
&\quad -2\sum_{k,p=1}^{n} R_{kijp}f_{pk} + \mathrm{scal}f_{ij} \\
&= (\Delta f)_{ij} + \frac{1}{2}D_i\mathrm{scal}D_jf + \frac{1}{2}D_j\mathrm{scal}D_if - \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n}D_p(\mathrm{scal})D_pf\right)\delta_{ij} \\
&\quad -2\sum_{k,p=1}^{n}[K_{12}(\delta_{kj}\delta_{ip} - \delta_{kp}\delta_{ij})]f_{pk} + \mathrm{scal}f_{ij} \\
&= (\Delta f)_{ij} + \frac{1}{2}D_i\mathrm{scal}D_jf + \frac{1}{2}D_j\mathrm{scal}D_if - \frac{1}{2}g(d\mathrm{scal}, df)\delta_{ij} \\
&\quad +\mathrm{scal}(f_{ij} - \Delta f\cdot\delta_{ij}) + \mathrm{scal}f_{ij} \\
&= (\Delta f)_{ij} + \frac{1}{2}D_i\mathrm{scal}D_jf + \frac{1}{2}D_j\mathrm{scal}D_if - \frac{1}{2}g(d\mathrm{scal}, df)\delta_{ij} + 2\mathrm{scal}\cdot M.
\end{aligned}
$$

Disto, concluímos nossa assertiva.

□

Com o auxílio dos Lemas anteriores, calcularemos uma equação de evolução para o traço livre da Hessiana de f.

Lema 3.8. *O tensor M satifaz a seguinte equação de evolução:*

$$D_{\frac{\partial}{\partial t}}M = \Delta M + \frac{1}{1-t}M - scal\cdot M.$$

Demonstração.

Por questão de abreviação, escreveremos $\overline{M} = D^2f$ e $A(X,Y) = \frac{\partial}{\partial t}D_XY$. Fixados dois campos X e Y em $\mathbb{S}^2$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\overline{M} &= \frac{\partial}{\partial t}(X(Y(f)) - (D_X Y)(f)) \\
&= X(Y(\frac{\partial f}{\partial t})) - (D_X Y)(\frac{\partial f}{\partial t}) - A(X,Y)(f) \\
&= D^2_{X,Y}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) - A(X,Y)(f).
\end{aligned}$$

Agora, usando a Proposição 2.2, calculamos

$$\begin{aligned}
A(X,Y)(f) &= g(A(X,Y), Df) \\
&= -(D_X\mathrm{Ric})(Y,Df) - (D_Y\mathrm{Ric})(X,Df) + (D_{Df}\mathrm{Ric})(X,Y) \\
&= -X(\mathrm{Ric}(Y,Df)) + \mathrm{Ric}(D_X Y, Df) + \mathrm{Ric}(Y, D_X Df) - Y(\mathrm{Ric}(X,Df)) \\
&\quad +\mathrm{Ric}(D_Y X, Df) + \mathrm{Ric}(X, D_Y Df) + Df(\mathrm{Ric}(X,Y)) + \mathrm{Ric}(D_{Df}X, Y) \\
&\quad +\mathrm{Ric}(X, D_{Df}Y) \\
&= -X\left(\frac{1}{2}\mathrm{scal}\cdot g(Y,Df)\right) + \frac{1}{2}\mathrm{scal}\cdot g(D_X Y, Df) + \frac{1}{2}\mathrm{scal}\cdot g(Y, D_X Df) \\
&\quad -Y\left(\frac{1}{2}\mathrm{scal}\cdot g(X,Df)\right) + \frac{1}{2}\mathrm{scal}\cdot g(D_Y X, Df) + \frac{1}{2}\mathrm{scal}\cdot g(X, D_Y Df) \\
&\quad -Df\left(\frac{1}{2}\mathrm{scal}\cdot g(X,Y)\right) + \frac{1}{2}\mathrm{scal}\cdot g(D_{Df}X, Y) + \frac{1}{2}\mathrm{scal}\cdot g(X, D_{Df}Y) \\
&= -\frac{1}{2}X(\mathrm{scal})g(Y,Df) - \frac{1}{2}\mathrm{scal}\cdot X(g(Y,Df)) + \frac{1}{2}\mathrm{scal}\cdot X(g(Y,Df)) \\
&\quad -\frac{1}{2}Y(\mathrm{scal})g(X,Df) - \frac{1}{2}\mathrm{scal}\cdot Y(g(X,Df)) + \frac{1}{2}\mathrm{scal}\cdot Y(g(X,Df)) \\
&\quad +\frac{1}{2}Df(\mathrm{scal})g(X,Y) + \frac{1}{2}\mathrm{scal}\cdot Df(g(X,Y)) - \frac{1}{2}\mathrm{scal}\cdot Df(g(X,Y)) \\
&= -\frac{1}{2}X(\mathrm{scal})Y(f) - \frac{1}{2}Y(\mathrm{scal})X(f) + \frac{1}{2}g(df, d\mathrm{scal})g(X,Y).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\overline{M}(X,Y) &= D^2_{X,Y}(\Delta f) + \frac{1}{1-t}D^2_{X,Y}f + \frac{1}{2}X(\mathrm{scal})Y(f) \\
&\quad +\frac{1}{2}Y(\mathrm{scal})X(f) - \frac{1}{2}g(df, d\mathrm{scal})g(X,Y).
\end{aligned}$$

Unindo este fato ao Lema 3.7, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{M}(X,Y) = (\Delta\overline{M})(X,Y) + \frac{1}{1-t}\overline{M}(X,Y) - 2\mathrm{scal}\cdot M(X,Y).$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}M(X,Y) &= \frac{\partial}{\partial t}\overline{M}(X,Y) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\Delta f\cdot g(X,Y))\right] \\
&= (\Delta M)(X,Y) + \frac{1}{1-t}M(X,Y) - 2\mathrm{scal}\cdot M(X,Y),
\end{aligned}
$$

pois,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\Delta f\cdot g(X,Y)) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{1-t} - \mathrm{scal}\right)g(X,Y) + \Delta f(-2\mathrm{Ric}_{g(t)}(X,Y)) \\
&= \left[\frac{1}{(1-t)^2} - \Delta\mathrm{scal} - \mathrm{scal}^2\right]g(X,Y) \\
&\quad + \left(\frac{1}{1-t} - \mathrm{scal}\right)(-\mathrm{scal}g(X,Y)) \\
&= -\Delta\mathrm{scal}\cdot g(X,Y) + \frac{1}{1-t}\left(\frac{1}{1-t} - \mathrm{scal}\right)g(X,Y) \\
&= \Delta((\Delta f)g(X,Y)) + \frac{1}{1-t}(\Delta f)g(X,Y).
\end{aligned}
$$

Disto, concluímos o lema.

$\square$

Lema 3.9. *Fixado $\alpha \in (0,1)$, existe uma constante positiva C tal que*

$$
sup_{S^2}|M|^2 \leq C(1-t)^{2\alpha-2},
$$

onde $t \in [0,1)$.

Demonstração. Antes de mais nada, observe que

$$
\begin{aligned}
g(\Delta M, M) &= g^{ij}g^{kl}(\Delta M)_{ik}M_{jl} \\
&= g^{ij}g^{kl}\left(\sum_u D_u D_u M_{ik}\right)M_{jl} \\
&= g^{ij}g^{kl}\left(\sum_u D_u(D_u M_{ik}M_{jl}) - \sum_u D_u M_{ik} D_u M_{jl}\right) \\
&= g^{ij}g^{kl}\sum_u D_u(D_u M_{ik}M_{jl}) - |DM|^2.
\end{aligned}
$$

Ainda temos

$$\begin{aligned}
g^{ij}g^{kl}\sum_u D_u(D_uM_{ik}M_{jl}) &= g^{ij}g^{kl}\left(\sum_u D_uD_uM_{ik}M_{jl}+\sum_u D_u(M_{ik}D_uM_{jl})\right)\\
\Longrightarrow 2g^{ij}g^{kl}\sum_u D_u(D_uM_{ik}M_{jl}) &= g^{ij}g^{kl}\sum_u D_uD_uM_{ik}M_{jl}\\
&= \Delta(|M|^2).
\end{aligned}$$

Isto significa que

$$g(\Delta M, M)=\frac{1}{2}\Delta(|M|^2)-|DM|^2.$$

Agora, como $\alpha\in(0,1)$, pela Proposição 3.5 podemos achar um número $\eta\in[0,1)$ tal que $(1-t)\mathrm{scal}\geq\alpha$ em $\mathbb{S}^2\times[1-\eta,1)$. Usando o Lema 3.8 e as observações anteriores, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(|M^2|) &= 2g(D_{\frac{\partial}{\partial t}}M,M)\\
&= 2g\left(\Delta M+\frac{1}{1-t}M-\mathrm{scal}\cdot M, M\right)\\
&= \Delta(|M|^2)-2|DM|^2+\frac{2}{1-t}|M|^2-2\mathrm{scal}|M|^2\\
&\leq \Delta(|M|^2)-2|DM|^2+\frac{2-2\alpha}{1-t}|M|^2,
\end{aligned}$$

em $\mathbb{S}^2\times[1-\eta,1)$. Usando o Princípio do Máximo, concluímos que $(1-t)^{2-2\alpha}|M|^2\leq C$, para alguma constante positiva C. Daí conclui-se o Lema.

□

Proposição 3.6. *Fixado $\alpha\in(0,1)$, existe uma constante positiva C tal que*

$$\sup_{\mathbb{S}^2}\left(scal_{g(t)}-\frac{1}{1-t}\right)^2\leq C(1-t)^{2\alpha-2}$$

Demonstração.
Inicialmente, note que

$$\begin{aligned}
2\sum_{i,j=1}^{2}(D^2_{e_ie_j}M)(e_i,e_j) &= \Delta(\Delta f)+\mathrm{scal}\Delta f+g(d\mathrm{scal},df)\\
&= \Delta\left(\frac{1}{1-t}-\mathrm{scal}\right)+\mathrm{scal}\left(\frac{1}{1-t}-scal\right)+g(d\mathrm{scal},df)\\
&= -\Delta\mathrm{scal}-\mathrm{scal}^2+\frac{1}{1-t}\mathrm{scal}+g(d\mathrm{scal},df)\\
&= -\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{1-t}\mathrm{scal}+g(d\mathrm{scal},df).
\end{aligned}$$

Denotando $H = (1-t)M$ e $h = (1-t)scal - 1$, temos pelo que foi visto anteriormente,

$$2\sum_{i,j=1}^{2}(D^2_{e_ie_j}H)(e_i,e_j) = -\frac{\partial}{\partial t}h + g(dh,df).$$

Pelo Lema 3.9, temos que, fixado $\alpha \in (0,1)$, existe uma constante positiva C_1, tal que

$$\sup_{\mathbb{S}^2}|H| \leq C_1(1-t)^{\alpha},$$

para todo $t \in [0,1)$. Pelo 3.8 temos que

$$D_{\frac{\partial}{\partial t}}H = \Delta H - \mathrm{scal}\cdot H,$$

de onde, o Corolário 2.5 implica que existe uma constante positiva C_2 tal que

$$\sup_{\mathbb{S}^2}|D^2H|^2 \leq C_2(1-t)^{2\alpha-2},$$

$\forall t \in [0,1)$. Isto implica que existe uma constante positiva C_3 tal que, $\forall t \in [0,1)$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}h + g(dh,df)\right| \leq C_3(1-t)^{\alpha-1}.$$

Integrando a desigualdade acima de t a τ, temos

$$\sup_{p\in\mathbb{S}^2}|h(p,t)| \leq \sup_{q\in\mathbb{S}^2}|h(q,\tau)| + \frac{C_3}{\alpha}\left[(1-t)^{\alpha} - (1-\tau)^{\alpha}\right], \tag{3.23}$$

para todo $t \in [0,1)$ e $\tau \in [t,1)$. Assim, fazendo $\tau \to 1$ em (3.23) e usando a Proposição 3.5, obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{p\in\mathbb{S}^2}|h(p,t)| &\leq \frac{C_3}{\alpha}(1-t)^{\alpha}\\
\Longrightarrow \sup_{\mathbb{S}^2}|(1-t)\mathrm{scal} - 1| &\leq C(1-t)^{2\alpha}\\
\Longrightarrow \sup_{\mathbb{S}^2}\left(\mathrm{scal} - \frac{1}{1-t}\right)^2 &\leq C(1-t)^{2\alpha-2},
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,1)$. Em nosso caso, $C = \frac{C_3}{\alpha}$.

□

Lema 3.10. *Fixe $\alpha \in (0,1)$. Dado qualquer inteiro $m \geq 1$, podemos achar uma constante positiva C tal que*

$$\sup_{\mathbb{S}^2}|D^m scal_{g(t)}|^2 \leq C(1-t)^{2\alpha-m-2}$$

Demonstração. Considere, como anteriormente, $h = (1-t)\text{scal} - 1$. Observando que

$$\frac{\partial}{\partial t}h = \Delta h + \text{scal} \cdot h,$$

e, da Proposição 3.6,

$$\sup_{\mathbb{S}^2} |h| \leq C_1(1-t)^\alpha,$$

podemos usar o Corolário 2.5 para concluir que

$$\sup_{\mathbb{S}^2} |D^m h|^2 \leq C_2(1-t)^{2\alpha - m},$$

para todo $t \in [0,1)$. Desta última desigualdade conclui-se o lema.

□

Teorema 3.1 (R. Hamilton)**.** *Considere g_0 uma métrica Riemanniana em $\mathbb{S}^2$ com curvatura escalar positiva e $Vol(\mathbb{S}^2, g_0) = 8\pi$. Considere $g(t)$, $t \in [0,T)$, a única solução maximal do fluxo de Ricci com métrica inicial g_0. Então $T = 1$, e as métricas rescalonadas $\tilde{g}(t) = \frac{1}{1-t}g(t)$ convergem em C^∞ para uma métrica de curvatura escalar contante igual a 1.*

Demonstração.
Pela Proposição 3.3 já vimos que $T = 1$. Denotando por $h(t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t)$, temos

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{1-t}g(t)\right) \\ &= \frac{g(t)}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t}\text{scal}_{g(t)} \cdot g(t) \\ &= -\frac{1}{1-t}\left(\text{scal}_{g(t)} - \frac{1}{1-t}\right)g(t). \end{aligned}$$

Fixado $\alpha \in (0,1)$, vimos pela Proposição 3.6 que

$$\sup_{t\in[0,1)}\left[(1-t)^{1-\alpha}\sup_{S^2}|h(t)|_{\tilde{g}(t)}\right] < \infty.$$

Ainda mais, pelo Lema 3.10,

$$\sup_{t\in[0,1)}\left[(1-t)^{1-\alpha}\sup_{\mathbb{S}^2}|D^m h(t)|_{\tilde{g}(t)}\right] < \infty,$$

para $m \geq 1$ inteiro. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |D^m h(t)|_{g(t)}dt &= \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^\alpha}(1-t)^\alpha |D^m h(t)|_{g(t)}dt \\ &\leq C\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

Desta forma, o Teorema de Convergência para métricas implica que as métricas $\tilde{g}(t)$ convergem em C^∞ para uma métrica $\bar{g}$ em $\mathbb{S}^2$. Utilizando a Proposição 3.5, concluiremos que $\bar{g}$ possui curvatura escalar constante igual a 1.

$\square$

Para concluir este capítulo, daremos uma versão do Teorema Diferenciável da Esfera em superfícies.

Teorema 3.2. *Considere Σ uma superfície compacta munida de uma métrica riemanniana g_0 com curvatura seccional positiva. Então Σ é difeomorfa à esfera $\mathbb{S}^2$ ou ao plano projetivo $\mathbb{RP}^2$.*

Demonstração. Como Σ é uma superfície, curvatura seccional positiva implica curvatura escalar positiva.

Se (Σ, g_0) é uma superfície orientável, segue do Teorema de Gauss-Bonnet que Σ é homeomorfa à esfera e tem curvatura escalar positiva. Como os cálculos realizados no Teorema 3.1 dependem apenas da característica, segue do Teorema 3.1 que Σ admite uma métrica com curvatura seccional constante igual a 1, logo é difeomorfa a uma forma espacial esférica. Como Σ é orientável, segue que Σ é difeomorfa à esfera.

No caso onde (Σ, g_0) é não orientável, consideramos seu recobrimento duplo orientável $(\overline{\Sigma}, \pi^* g_0)$. Como π é uma isometria local, segue que $(\overline{\Sigma}, \pi^* g_0)$ tem curvatura seccional positiva e, pelo Teorema de Bonnet-Myers (cf. Teorema 1.2), é uma superfície compacta. Além disso $\overline{\Sigma}$ é orientável. Utilizando os argumentos anteriores, será possível encontrar uma métrica g_∞ de forma que $(\overline{\Sigma}, g_\infty)$ tem curvatura seccional constante igual a 1. Por outro lado, $(\overline{\Sigma}, g_\infty)$ é localmente isométrica a $(\Sigma, \pi_* g_\infty)$. Como isometrias locais preservam curvatura, segue que $(\Sigma, \pi_* g_\infty)$ tem curvatura seccional constante igual a 1 e, portanto, Σ é difeomorfa a uma forma espacial esférica. Como Σ é não-orientável, segue que Σ é difeomorfa ao plano projetivo $\mathbb{RP}^2$.

$\square$

Capítulo 4

A Teoria de Hamilton

Com o intuito de estudar algumas propriedades do fluxo de Ricci, torna-se necessário analisar algumas condições de curvatura que são preservadas pelo fluxo. Neste capítulo, desenvolvemos técnicas gerais para verificar que uma dada condição sobre a curvatura é preservada pelo fluxo de Ricci. Estas técnicas serão baseadas no Princípio do Máximo de Hamilton, que será demonstrado na seção 2 deste capítulo.

Na primeira seção, abordaremos algumas propriedades do cones normais e tangente de um conjunto convexo, bem como condições necessárias para que um conjunto seja invariante por uma E. D. O.. Na segunda seção, apresentamos o princípio do Máximo de Hamilton. Na seção 3, introduziremos a crucial noção de conjunto pinçante e, através das estimativas de Shi, descreveremos um critério geral de convergência para o fluxo de Ricci. Por fim, aplicaremos este critério para obter o importante resultado de Hamilton que afirma que toda variedade compacta de dimensão três que admite uma métrica de curvatura de Ricci positiva é difeomorfa a uma forma espacial esférica. Este resultado, que foi primordialmente demonstrado em [17], é uma generalização do Teorema da esfera, visto que curvatura seccional positiva implica curvatura de Ricci positiva.

4.1 Os cones normal e tangente de um conjunto convexo

No que segue a esta seção, V denotará um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que gera uma norma $\| \cdot \|$. Lembre que $F \subset V$ é um conjunto convexo se $(1-t)x + ty \in F$, $\forall\, t \in [0,1]$ e $x, y \in F$.

Definição 4.1. *Considere $F \subset V$ um subconjunto convexo e fechado. Para cada $y \in F$, definimos o Cone Normal a F em y por*

$$N_y F = \{ z \in V; \langle x - y, z \rangle \geq 0, \forall x \in F \}.$$

Definimos também o Cone Tangente a F em y por

$$T_y F = \{ x \in V; \langle z, x \rangle \geq 0, \forall z \in N_y F \}.$$

Observação 4.1. *Facilmente pode-se ver que N_yF e T_yF são conjuntos fechados e convexos. Além disso, se y está no interior de $F \subset V$ então $N_yF = \{0\}$ e $T_yF = V$. De fato, se $y \in int(F)$ e $z \in N_yF$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $y - \varepsilon z \in F$. Portanto,*

$$\langle (y - \varepsilon z) - y, z \rangle \geq 0 \Longrightarrow -\varepsilon ||z||^2 \geq 0 \Longrightarrow z = 0$$

Logo $N_yF = 0$ e $T_yF = V$.

$\square$

Lema 4.1. *Sejam $F \subset V$ um subconjunto convexo e fechado, $y \in F$ e $z \in V$. São equivalentes*

(i) $d(z, F) = \|y - z\|$

(ii) $y - z \in N_yF$

Demonstração.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Considere $x \in F$. Como F é convexo e $x, y \in F$, segue que se $s \in [0, 1]$, então $sx + (1 - s)y \in F$. Por **(i)** temos que

$$\|sx + (1 - s)y - z\| \geq d(z, F) = \|y - z\|.$$

A igualdade ocorre para $s = 0$. Desta forma, $s = 0$ é um ponto de mínimo da função $s \mapsto 1/2\|sx + (1 - s)y - z\|^2$. Logo,

$$\langle x - y, y - z \rangle = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \|sx + (1 - s)y - z\|^2 \geq 0$$

Como $x \in F$ foi tomado arbitrariamente, segue que $y - z \in N_yF$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Supondo que $y - z \in N_yF$, temos que $\langle x - y, y - z \rangle \geq 0$, para todo $x \in F$. Assim,

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + 2\langle x - y, y - z \rangle + \|y - z\|^2 \geq \|y - z\|^2,$$

para todo $x \in F$. Como $y \in F$, temos

$$d(z, F) \geq \|y - z\| \geq d(z, F).$$

Disto, segue **(ii)**.

$\square$

Lema 4.2. *Sejam $F \subset V$ um subconjunto convexo e fechado de V, $y \in F$ e $z \in V$. Se $d(z, F) = \|y - z\|$, temos*

$$0 \leq d(\bar{z}, F)\|y - z\| + \langle \bar{z} - y, y - z \rangle,$$

para todo $\bar{z} \in V$.

Demonstração.

Pelo Lema 4.1, segue que $y - z \in N_y F$. Assim, se $x \in F$ e $\bar{z} \in V$, usamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz para obter

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x - y, y - z \rangle &= \langle x - \bar{z}, y - z \rangle + \langle \bar{z} - y, y - z \rangle \\ &\leq \|x - \bar{z}\| \cdot \|y - z\| + \langle \bar{z} - y, y - z \rangle \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo de ambos os lados para todos $x \in F$, concluímos o resultado desejado.

□

Proposição 4.1. *Seja $F \subset V$ um subconjunto convexo e fechado de V. Se $x : [0, T) \longrightarrow V$ é uma curva contínua tal que $x(0) \in F$, temos*

(i) *Se $x(t) \in F$, $\forall t \in [0, T)$, então $x'(0) \in T_{x(0)}F$;*

(ii) *Se $x'(0)$ está no interior de $T_{x(0)}F$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $x(t) \in F$, $\forall t \in [0, \varepsilon]$.*

Demonstração.

(i) Se $x(t) \in F$, $\forall t \in [0, T)$, temos

$$\langle x(t) - x(0), z \rangle \geq 0,$$

para todos $t \in [0, T)$ e $z \in N_{x(0)}F$. A igualdade ocorre se $t = 0$. Assim, $t = 0$ é um ponto de mínimo da função $s \mapsto \langle x(t) - x(0), z \rangle$. Logo,

$$\langle x'(0), z \rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle x(t) - x(0), z \rangle \geq 0,$$

para todo $z \in N_{x(0)}F$. Isto significa que $x'(0) \in T_{x(0)}F$.

(ii) Supondo que esta afirmação é falsa, podemos encontrar uma sequência $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $(0, T)$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} t_k = 0 \text{ e } x(t_k) \notin F.$$

Como F é um conjundo fechado, podemos encontrar $y_k \in F$ tal que $d(x(t_k), F) = \|y_k - x(t_k)\| > 0$. Defina

$$z_k = \frac{y_k - x(t_k)}{\|y_k - x(t_k)\|},$$

e observe, pelo lema 4.1, que $y_k - x(t_k) \in N_{y_k}F$. Como $N_{y_k}F$ é um cone segue que $z_k \in N_{y_k}F$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Assim, já que $x(0) \in F$, temos

$$\langle x(0) - y_k, z_k \rangle \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Por outro lado,

$$\langle y_k - x(t_k), z_k \rangle = \|y_k - x(t_k)\| > 0, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Adicionando (4.1) e (4.2) teremos

$$\langle x(0) - x(t_k), z_k \rangle > 0, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Agora, note que

$$\lim_{k \to \infty} \|y_k - x(t_k)\| = \lim_{k \to \infty} d(x(t_k), F) = 0,$$

donde $y_k \to x(0)$ quando $k \to \infty$. Como $\|z_k\| = 1$, existe uma subsequência $z_{k_n} \to z$ com $\|z\| = 1$. Como $z_k \in N_{y_k}$ para cada k, segue que $z \in N_{x(0)}F$. Como $x'(0)$ está no interior de $T_{x(0)}F$, temos que $\langle x'(0), z \rangle > 0$. Logo, usando (4.3), teremos

$$0 < \langle x'(0), z \rangle = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{t_k} \langle x(t_k) - x(0), z \rangle \leq 0,$$

o que é um absurdo.

$\square$

Definição 4.2. *Considere um campo vetorial suave $\Phi : V \longrightarrow V$. Diremos que F é invariante pela E.D.O*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t), & = \Phi(x(t)) \\ x(0) & = x_0, \end{cases}$$

se $x(t) \in F$, sempre que $x_0 \in F$. Se isto ocorrer, diremos que F é Φ-invariante.

Proposição 4.2. *Sejam $F \subset V$ um subconjunto fechado e $\Phi : V \longrightarrow V$ uma função suave. São equivalentes:*

(i) *F é Φ-invariante;*

(ii) *$\langle \Phi(y), y - z \rangle \geq 0$, para todos $y \in F$ e $z \in V$ tais que $d(z, F) = \|y - z\|$.*

Demonstração.
(i) $\Longrightarrow$ (ii). Considere $y \in F$ e $z \in V$ tais que $d(z, F) = ||y - z||$. Seja $x : [0, T) \longrightarrow V$ uma solução da E.D.O $x'(t) = \Phi(x(t))$ com $x(0) = y$. Por hipótese $x(t) \in F$, $\forall t \in [0, T)$, donde

$$\|x(t) - z\| \geq d(F, z) = \|y - z\|.$$

A igualdade ocorre quando $t = 0$. Assim, $t = 0$ é um ponto de mínimo da função $t \mapsto 1/2\|x(t) - z\|^2$. Daí

$$\langle \Phi(y), y - z \rangle = \langle x'(0), x(0) - z \rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{1}{2}\|x(t) - z\|^2 \geq 0,$$

como queríamos demonstrar.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Suponha que $x : [0, T) \longrightarrow V$ é uma solução da E.D.O. $x'(t) = \Phi(x(t))$ com $x(0) = y \in F$. Suponha ainda, por absurdo, que $\exists \tau \in (0, T)$ tal que $x(\tau) \notin F$. Como F é um conjunto fechado, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x(\tau), F) > e^{k_0 \tau - k_0^2}.$$

Para $k \geq k_0$, definamos

$$t_k = \sup\left\{t \in [0, \tau]; d(x(t), F) \leq e^{kt - k^2}\right\}$$

Claramente temos que $t_k \in (0, T)$ e $d(x(t_k), F) = e^{kt_k - k^2} > 0$. Daí $x(t_k) \notin F$. Como F é um conjunto fechado, segue que $\exists | y_k \in F$ tal que $d(x(t_k), F) = \|x(t_k) - y_k\| > 0$. Como $d(x(t_k), F) \to 0$, quando $k \to \infty$, segue que $\|y_k - x(t_k)\| \to 0$ quando $k \to \infty$. Além disso,

$$d(x(t), F) \geq e^{kt - k^2}, \forall t \in [t_k, \tau].$$

Daí, se $t \in [t_k, \tau]$, temos

$$\begin{array}{rcl} e^{k(t_k - t)}\|y_k - x(t_k)\| & \geq & e^{k(t_k - t)} d(x(t), F) \\ & \geq & e^{kt_k - k^2} \\ & = & d(x(t_k), F) \\ & = & \|y_k - x(t_k)\|. \end{array}$$

A igualdade ocorre se $t = t_k$. Assim, $t = t_k$ é um ponto de mínimo da função $t \mapsto e^{k(t_k - t)}\|y_k - x(t_k)\|$, donde

$$-k\|y_k - x(t_k)\|^2 - \langle x'(t_k), y_k - x(t_k) \rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_k} (e^{k(t_k - t)}\|y_k - x(t_k)\|)^2 \geq 0$$

Desta forma,

$$\langle \Phi(x(t_k), y_k - x(t_k) \rangle \leq -k\|y_k - x(t_k)\|^2.$$

Como por hipótese temos que $\langle \Phi(y_k), y_k - x(t_k) \rangle \geq 0$, concluímos que

$$\langle \Phi(y_k) - \Phi(x(t_k), y_k - x(t_k)) \rangle \geq k\|y_k - x(t_k)\|^2 \tag{4.4}$$

Por outro lado, como Φ é uma função suave, segue que Φ é localmente Lipschitz. Como $||y_k - x(t_k)|| \to 0$ quando $k \to \infty$, podemos tomar k suficientemente grande de forma que y_k e x_k estejam contidos numa mesma vizinhança onde Φ é Lipschitz. Mas isto é uma contadição em vista da desigualdade (4.4). Deste absurdo concluímos o resultado almejado.

$\square$

Corolário 4.1. *Sejam $F \subset V$ um conjunto convexo e fechado, e $\Phi : V \longrightarrow V$ uma função suave. São equivalentes:*

(i) *F é Φ-invariante;*

(ii) $\Phi(y) \in T_yF$, $\forall y \in F$.

Demonstração. Esta equivalência segue diretamente do Lema 4.1 e da Proposição 4.2.

$\square$

4.2 O Princípio do Máximo de Hamilton para o Fluxo de Ricci

Considere V um espaço vetorial de dimensão n munido de um produto interno. Denotaremos por $\mathscr{C}(V)$ o espaço de todas as formas quadrilineares $R : V \times V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = R(Z, W, X, Y),$$

para todos vetores $X, Y, Z, W \in V$. Além disso denotaremos por $\mathscr{C}_B(V)$ o conjunto de todas as formas quadrilineares $R \in \mathscr{C}(V)$ que satisfazem a 1^a Identidade de Bianchi:

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0,$$

para todos vetores $X, Y, Z, W \in V$. $\mathscr{C}_B(V)$ é denotado como sendo o Espaço dos tensores curvatura algébrico em V.

A partir de agora, considere $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ como sendo uma base ortonormal de V.

Definição 4.3. *Dado qualquer tensor de curvatura algébrico $R \in \mathscr{C}_B(V)$, definimos*

$$R^2(X, Y, Z, W) = \sum_{p,q=1}^{n} R(X, Y, e_p, e_q)R(Z, W, e_p, e_q)$$

e

$$R^{\#}(X, Y, Z, W) = 2\sum_{p,q=1}^{n} R(X, e_p, Z, e_q)R(Y, e_p, W, e_q) - 2\sum_{p,q=1}^{n} R(X, e_p, W, e_q)R(Y, e_p, Z, e_q),$$

para quaisquer $X, Y, Z, W \in V$. Ainda mais, representaremos

$$Q(R) = R^2 + R^{\#}.$$

É fácil notar que R^2, $R^\#$ e $Q(R)$ pertencem a $\mathscr{C}(V)$. A seguir provaremos que $Q(R)$ satisfaz a 1^a Identidade de Bianchi e, portanto, pertence a $\mathscr{C}_B(V)$.

Proposição 4.3. *Considere $R \in \mathscr{C}_B(V)$ um tensor de curvatura algébrico. Então*

$$Q(R)(X,Y,Z,W) + Q(R)(Y,Z,X,W) + Q(R)(Z,X,Y,W) = 0,$$

para todos vetores $X,Y,Z,W \in V$. Consequentemente $Q(R) \in \mathscr{C}_B(V)$.

Demonstração. Pela definição de $R^\#$, temos

$$\begin{aligned}
&R^\#(X,Y,Z,W) + R^\#(Y,Z,X,W) + R^\#(Z,X,Y,W)\\
&= 2\sum_{p,q=1}^{n}[R(Y,e_p,X,e_q) - R(X,e_p,Y,e_q)]R(Z,e_p,W,e_q)\\
&+2\sum_{p,q=1}^{n}[R(Z,e_p,Y,e_q) - R(Y,e_p,Z,e_q)]R(X,e_p,W,e_q)\\
&+2\sum_{p,q=1}^{n}[R(X,e_p,Z,e_q) - R(Z,e_p,X,e_q)]R(Y,e_p,W,e_q)
\end{aligned}$$

Lembrando que $R(Y,e_q,X,e_p) = R(X,e_p,Y,e_q)$, $R(X,e_q,Y,e_p) = R(Y,e_p,X,e_q)$ e $R(Z,e_q,W,e_p) = R(W,e_p,Z,e_q)$, temos

$$\begin{aligned}
&2\sum_{p,q=1}^{n}[R(Y,e_p,X,e_q) - R(X,e_p,Y,e_q)]R(Z,e_p,W,e_q)\\
=&\sum_{p,q=1}^{n}[R(Y,e_p,X,e_q) - R(X,e_p,Y,e_q)]R(Z,e_p,W,e_q)\\
+&\sum_{q,p=1}^{n}[R(Y,e_q,X,e_p) - R(X,e_q,Y,e_p)]R(Z,e_q,W,e_p)\\
=&\sum_{p,q=1}^{n}[R(Y,e_p,X,e_q) - R(X,e_p,Y,e_q)][R(Z,e_p,W,e_q) - R(W,e_p,Z,e_q)].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&R^\#(X,Y,Z,W) + R^\#(Y,Z,X,W) + R^\#(Z,X,Y,W)\\
=&\sum_{p,q=1}^{n}[R(Y,e_p,X,e_q) - R(X,e_p,Y,e_q)][R(Z,e_p,W,e_q) - R(W,e_p,Z,e_q)]\\
+&\sum_{p,q=1}^{n}[R(Z,e_p,Y,e_q) - R(Y,e_p,Z,e_q)][R(X,e_p,W,e_q) - R(W,e_p,X,e_q)]\\
+&\sum_{p,q=1}^{n}[R(X,e_p,Z,e_q) - R(Z,e_p,X,e_q)][R(Y,e_p,W,e_q) - R(W,e_p,Y,e_q)].
\end{aligned}$$

Lembrando que R satisfaz a 1^a Identidade de Bianchi e lembrando da definição de R^2, temos

$$\begin{aligned}
& R^{\#}(X,Y,Z,W) + R^{\#}(Y,Z,X,W) + R^{\#}(Z,X,Y,W) \\
= & -\sum_{p,q=1}^{n} R(X,Y,e_p,e_q)R(Z,W,e_p,e_q) \\
- & \sum_{p,q=1}^{n} R(Y,Z,e_p,e_q)R(X,W,e_p,e_q) \\
- & \sum_{p,q=1}^{n} R(Z,X,e_p,e_q)R(Y,W,e_p,e_q) \\
= & -R^2(X,Y,Z,W) - R^2(Y,Z,X,W) - R^2(Z,X,Y,W).
\end{aligned}$$

Disto concluímos o resultado almejado.

$\square$

Definição 4.4. *A E.D.O $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ no espaço $\mathscr{C}_B(V)$ é conhecida como a E.D.O. de Hamilton.*

Definição 4.5. *Dado um tensor curvatura algébrico $R \in \mathscr{C}_B(V)$ e uma base ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V, definimos uma forma bilinear Ric(R) $: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ conhecida como tensor curvatura algébrico de Ricci por*

$$Ric(R)(X,Y) = \sum_{p=1}^{n} R(X,e_p,Y,e_p),$$

para quaisquer $X, Y \in V$.

Definimos também a curvatura escalar algébrica como sendo a função linear scal : $\mathscr{C}_B(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$scal(R) = \sum_{i=1}^{n} Ric(R)(e_i,e_i).$$

Observação 4.2. *Como os conceitos correspondentes em variedades, o tensor curvatura algébrico de Ricci e a curvatura escalar algébrica satisfazem as identidades*

$$Ric(Q(R))(X,Y) = 2\sum_{p,q=1}^{n} Ric(R)(e_p,e_q)R(X,e_p,Y,e_q) \quad e \quad scal(Q(R)) = 2\|Ric(R)\|^2.$$

A partir de agora, consideraremos $V = \mathbb{R}^n$, M uma variedade compacta de dimensão n e $g(t)$, $t \in [0,T)$, uma solução do fluxo de Ricci em M. Considere ainda $E \xrightarrow{\pi} M \times [0,T)$ a fibração de Unlenbeck, como definida anteriormente.

Represente a métrica de M por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para cada $p \in M$, podemos identificar isometricamente o espaço tangente T_pM com $\mathbb{R}^n$. Para isto, fixamos uma base ortonormal

$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de T_pM e associamos a cada $v \in T_pM$ o vetor $(\langle v, e_i \rangle)_i \in \mathbb{R}^n$. É conveniente notar que duas identificações distintas estão relacionadas pela ação de uma isometria linear ortogonal $T \in O(n)$ que corresponde a uma mudança de base.

É fácil notar que se $R \in \mathscr{C}_B(V)$, $T \in O(n)$ e $R_T(X, Y, Z, W) = R(T(X), T(Y), T(Z), T(W))$, para quaisquer $X, Y, Z, W \in V$, temos que $R_T \in \mathscr{C}_B(V)$. Visto isso, diremos que um conjunto $S \subset \mathscr{C}_B(V)$ é $O(n)$-invariante se $R_T \in S$, $\forall R \in S$ e $\forall T \in O(n)$.

Denomine por $A_{(p,t)} : (\mathbb{R}^n, g_{can}) \longrightarrow (T_pM, g(t))$ a isometria natural entre $\mathbb{R}^n$ e T_pM com a métrica $g(t)$. $A_{(p,t)}$ induz uma isometria, a qual também denominaremos por $A_{(p,t)}$, que identifica um tensor de curvatura numa variedade $(M, g(t))$ num ponto p com um tensor curvatura algébrico. $A_{(p,t)} : \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{C}_B(T_pM)$ é dada por

$$(A_{(p,t)}R)(X, Y, Z, W) = R(A^{-1}_{(p,t)}X, A^{-1}_{(p,t)}Y, A^{-1}_{(p,t)}Z, A^{-1}_{(p,t)}W),$$

onde $X, Y, Z, W \in T_pM$.

A partir de agora, consideraremos $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ um subconjunto convexo, fechado e $O(n)$-invariante. Definamos $F_{(p,t)} \subset \mathscr{C}_B(T_pM)$ por $F_{(p,t)} = A_{(p,t)}(F)$.

Observação 4.3. *Como F é um conjunto $O(n)$-invariante, segue que $F_{(p,t)}$ não depende da escolha da isometria $A_{(p,t)}$. De fato, se $B_{(p,t)}$ é outra isometria entre $\mathbb{R}^n$ e T_pM, temos pelas observações feitas anteriormente que $B^{-1}_{(p,t)} \circ A_{(p,t)} \in O(n)$, de onde*

$$F_{(p,t)} = A_{(p,t)}(F) = B_{(p,t)} \circ (B^{-1}_{(p,t)} \circ A_{(p,t)})(F) = B_{(p,t)}(F)$$

Proposição 4.4. *Sejam M uma variedade compacta de dimensão n e $g(t)$, $t \in [0, T)$, uma solução do Fluxo de Ricci em M. Considere ainda $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ um conjunto convexo, fechado e $O(n)$-invariante. Suponha que existam $(p_0, t_0) \in M \times [0, T)$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tal que*

$$e^{\mu(t_0 - t)} d(R_{(p,t)}, F(_{(p,t)})) \leq d(R_{(p_0,t_0)}, F(_{(p_0,t_0)})), \tag{4.5}$$

onde $R_{(p,t)}$ é o tensor de curvatura de $g(t)$ em $p \in M$, e $(p, t) \in M \times [0, t_0]$. Se $S \in F_{(p_0,t_0)}$ é um tensor de curvatura algébrico satisfazendo $d(R_{(p_0,t_0)}, F(_{(p_0,t_0)})) = \|S - R_{(p_0,t_0)}\|$, valem

(i) $\langle D_{\partial t} R_{(p_0,t_0)}, S - R_{(p_0,t_0)} \rangle \leq -\mu \|S - R_{(p_0,t_0)}\|^2$

(ii) $\langle D^2_{v,v} R_{(p_0,t_0)}, S - R_{(p_0,t_0)} \rangle \geq 0$, $\forall v \in T_{p_0}M$.

Demonstração.

(i) Para cada $s \in [0, t_0)$, seja $P(s) : \mathscr{C}_B(E_{(p_0,t_0)}) \longrightarrow \mathscr{C}_B(E_{(p_0,t_0-s)})$ o transporte paralelo até o instante s da curva $s \mapsto R_{(p_0,t_0-s)}$ com respeito a conexão D induzida em $\mathscr{C}_B(E)$. Defina

$$H(s) = P(s)^{-1}(R(p_0, t_0 - s)) \in \mathscr{C}_B(E_{(p_0,t_0)}).$$

Desta forma, temos que $H(0) = R(p_0, t_0)$ e $P(s)H(s) = R(p_0, t_0 - s)$. Como F é $O(n)$-invariante e $P(s)$ é uma isometria, segue que $P(s)(F_{(p_0,t_0)}) = F_{(p_0,t_0-s)}$, $\forall s \in [0, t_0)$. Assim, usando que $P(s)$ é uma isometria e a hipótese (4.5), temos

$$\begin{aligned} e^{\mu s} d(H(s), F_{(p_0,t_0)}) &= e^{\mu s} d(P(s)(H(s)), P(s)(F_{(p_0,t_0)})) \\ &= e^{\mu s} d(R(p_0, t_0 - s), F_{(p_0,t_0-s)}) \\ &\leq d(R_{(p_0,t_0)}, F(_{(p_0,t_0)})) \\ &= \|S - H(0)\|, \end{aligned} \tag{4.6}$$

$\forall s \in [0, t_0)$.

Observe $F_{(p_0,t_0)} = A_{(p,t)}(F)$ é um conjunto fechado e convexo pois $A_{(p,t)}$ é uma isometria e F é um conjunto fechado e convexo. Usando o Lema 4.2 com $y = S$, $A = F_{(p_0,t_0)}$ e $\bar{z} = H(s)$, segue que

$$0 \leq d(H(s), F_{(p_0,t_0)})\|S - H(0)\| + \langle H(s) - S, S - H(0)\rangle, \tag{4.7}$$

$\forall s \in [0, t_0)$. De (4.6) e (4.7) segue que

$$0 \leq e^{-\mu s}\|S - H(0)\|^2 + \langle H(s) - S, S - H(0)\rangle,$$

com a iguadade ocorrendo para $s = 0$. Isto significa que $s = 0$ é um ponto de mínimo da função $s \mapsto e^{-\mu s}\|S - H(0)\|^2 + \langle H(s) - S, S - H(0)\rangle$. Portanto,

$$-\mu\|S-H(0)\|^2+\langle H'(0), S-H(0)\rangle = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(e^{-\mu s}\|S-H(0)\|^2+\langle H(s)-S, S-H(0)\rangle) \geq 0. \tag{4.8}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} P(s)H'(s) &= \frac{D}{ds}(P(s)H(s)) \\ &= \frac{D}{ds}R_{(p_0,t_0-s)} \\ &= -D_{\partial t}R_{(p_0,t_0-s)}, \end{aligned}$$

donde $H'(0) = -D_{\partial t}R_{(p_0,t_0)}$. Substituindo esta expressão em (4.8), concluímos

$$\langle D_{\partial t}R_{(p_0,t_0)}, S - R_{(p_0,t_0)}\rangle \leq -\mu\|S - R_{(p_0,t_0)}\|^2$$

(ii) Fixe $v \in T_{p_0}M$ e considere a geodésica $\gamma(s) = \exp_{p_0}(sv)$, $s \in \mathbb{R}$, onde exp é a aplicação exponencial relativa à métrica $g(t_0)$ em M. Considere $P(s) : \mathscr{C}_B(E_{(p_0,t_0)}) \longrightarrow \mathscr{C}_B(E_{(\gamma(s),t_0)})$ o transporte paralelo ao longo de γ com respeito à métrica $g(t_0)$. Defina

$$H(s) = P(s)^{-1}(R_{(\gamma(s),t_0)}), \forall s \in \mathbb{R}.$$

Desta forma, temos que $H(s) \in \mathscr{C}_B(E_{(p_0,t_0)})$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$H(0) = R(p_0, t_0) \;\text{ e }\; P(s)H(s) = R_{(\gamma(s),t_0)}.$$

Como P é uma isometria e F é $O(n)$-invariante, temos que $P(s)(F_{(p_0,t_0)}) = F(\gamma(s), t_0)$. Assim,

$$\begin{aligned} d(H(s), F_{(p_0,t_0)}) &= d(R_{(\gamma(s),t_0)}) \\ &\leq d(R_{(p_0,t_0)}, F_{(p_0,t_0)}) \\ &= \|S - H(0)\|, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$\forall s \in \mathbb{R}$. Segue do Lema 4.2 que

$$0 \leq d(H(s), F_{(p_0,t_0)})\|S - H(0)\| + \langle H(s) - S, S - H(0)\rangle, \tag{4.10}$$

$\forall s \in \mathbb{R}$. Somando (4.9) com (4.10), temos

$$0 \leq \|S - H(0)\|^2 + \langle H(s) - S, S - H(0)\rangle,$$

com a igualdade ocorrendo para $s = 0$. Assim, como fizemos anteriormente,

$$\langle H''(0), S - H(0)\rangle = \frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} \|S - H(0)\|^2 + \langle H(s) - S, S - H(0)\rangle \geq 0. \tag{4.11}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P(s)H''(s) &= \frac{D^2}{ds^2}(P(s)H(s)) \\ &= \frac{D^2}{ds^2} R_{(\gamma(s),t_0)} \\ &= D^2_{\gamma'(s),\gamma'(s)} R_{(\gamma(s),t_0)}, \end{aligned}$$

donde $H''(0) = D^2_{v,v} R_{(p_0,t_0)}$. Disto e de (4.11), concluímos o resultado desejado.

$\square$

O resultado principal desta seção, que demonstraremos a seguir, assegura que uma condição de curvatura é preservada pelo Fluxo de Ricci, sempre quando $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto fechado, convexo, $O(n)$-invariante e invariante pela E.D.O. de Hamilton $\frac{d}{dt}R = Q(R)$. Este resultado é conhecido como o Princípio do Máximo de Hamilton:

Teorema 4.1 (R. Hamilton, [19]). *Assuma que $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto fechado, convexo, $O(n)$-invariante e invariante pela E.D.O. de Hamilton $\frac{d}{dt}R = Q(R)$. Ainda mais, suponha que M é uma variedade compacta de dimensão n e $g(t)$, $t \in [0,T)$, é uma solução do Fluxo de Ricci com a propriedade que $R_{(p,0)} \in F_{(p,0)}$ para todos os pontos $p \in M$. Então $R_{(p,t)} \in F_{(p,t)}$, para todos $(p,t) \in M \times [0,T)$.*

Demonstração. Considere a função $u : [0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(t) = \sup_{p \in M} d(R_{(p,t)}, F_{(p,t)}).$$

Por hipótese, já sabemos que $u(0) = 0$. Suponha, por absurdo, que exista $\tau \in (0,T)$ tal que $u(\tau) > 0$. Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u(\tau) - e^{k\tau - k^2} > 0$ para $k > k_0$. Desta forma o conjunto $\left\{t \in [0,T); u(t) \geq e^{kt-k^2}\right\}$ é não vazio se $k > k_0$. Definimos, para $k > k_0$, a sequência

$$t_k = \inf\left\{t \in [0,T); u(t) \geq e^{kt-k^2}\right\}.$$

Temos que $t_k \in (0,\tau)$ para k suficientemente grande. De fato, pela definição de t_k, se $t_k \geq \tau$, $\forall k$, então $u(\tau) > e^{kt-k^2}$, $\forall k$, o que é um absurdo.

Ainda observamos que $u(t_k) = e^{kt_k - k^2} \to 0$ quando $k \to \infty$.

Como M é compacta, existe $p_k \in M$ tal que $u(t_k) = d(R_{(p_k,t_k)}, F_{(p_k,t_k)}) = e^{kt_k-k^2}$. Como F é um conjunto fechado, para cada k existe um único $S_k \in F$ tal que

$$u(t_k) = d(R_{(p_k,t_k)}, F_{(p_k,t_k)}) = \|S_k - R_{(p_k,t_k)}\| > 0.$$

Como $u(t) \leq e^{kt-k^2}$, $\forall t \in [0,t_k]$, obtemos

$$\begin{aligned} d(R_{(p_k,t_k)}, F_{(p_k,t_k)}) &= e^{kt_k-k^2} \\ &= e^{k(t_k-t)} \cdot e^{kt-k^2} \\ &\geq e^{k(t_k-t)} u(t) \\ &\geq e^{k(t_k-t)} d(R_{(p,t)}, F_{(p,t)}), \end{aligned}$$

para todos $(p,t) \in M \times [0,t_k]$. Usando a Proposição 4.4 chegaremos que

$$\langle D_{\partial t} R_{(p_k,t_k)}, S_k - R_{(p_k,t_k)} \rangle \leq -k \|S_k - R_{(p_k,t_k)}\|^2, \tag{4.12}$$

e

$$\langle \Delta R_{(p_k,t_k)}, S_k - R_{(p_k,t_k)} \rangle \geq 0. \tag{4.13}$$

Lembrando que $Q(R) = D_{\partial t}R - \Delta R$, somamos (4.12) e (4.13) para obter

$$\langle Q(R_{(p_k,t_k)}), S_k - R_{(p_k,t_k)}\rangle \leq -k\|S_k - R_{(p_k,t_k)}\|^2, . \tag{4.14}$$

se $k > k_0$. Como F é um conjunto fechado e Q-invariante, segue da Proposição 4.2 que

$$\langle Q(S_k), S_k - R_{(p_k,t_k)}\rangle \geq 0, \tag{4.15}$$

se $k > k_0$. Subtraindo (4.14) de (4.15), obtemos

$$\langle Q(S_k) - Q(R_{(p_k,t_k)}), S_k - R_{(p_k,t_k)}\rangle \geq k\|S_k - R_{(p_k,t_k)}\|^2.$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, chegaremos que

$$\|Q(S_k) - Q(R_{(p_k,t_k)})\| \geq k\|S_k - R_{(p_k,t_k)}\|, \tag{4.16}$$

se $k > k_0$. Como $\|S_k - R_{(p_k,t_k)}\| \to 0$, quando $k \to \infty$ e $Q(R)$ é uma função suave, (logo localmente Lipschitz), podemos tomar k suficientemente grande de forma que S_k e $R_{(p_k,t_k)}$ estejam numa mesma vizinhança onde Q é k-Lipschitz. Isto contradiz (4.16).

Esta contradição surgiu do fato de supormos que existiria $\tau \in (0, T)$ tal que $u(\tau) > 0$. Portanto $u(t) = 0$, $\forall t \in [0, T)$.

□

4.3 O Teorema da Convergência de Hamilton

No que segue a esta seção, descreveremos um método geral para provar resultados de convergência para o Fluxo de Ricci. As normas $\|\cdot\|$ serão induzidas pela métrica $g(t)$. Quando necessário, explicitaremos qual a métrica que induz a norma. Iniciaremos esta seção com algumas definições.

Definição 4.6. *Dados $R \in \mathscr{C}_B(V)$ e $\pi \subset \mathbb{R}^n$ um plano bidimensional gerado pelos vetores ortonormais $\{u, v\}$, definimos a Curvatura Seccional algébrica de π por*

$$K(R, \pi) = R(u, v, u, v).$$

Observação 4.4. *Como no caso do tensor curvatura Riemanniana, a curvatura seccional algébrica independe da base ortonormal escolhida.*

Definição 4.7. *Considere $R \in \mathscr{C}_B(V)$ e $\delta \in (0, 1)$. Diremos que R é estritamente δ-pinçado se $0 < \delta K(\pi_1) < K(\pi_2)$, para todos planos $\pi_1, \pi_2 \subset \mathbb{R}^n$.*

Diremos que R é fracamente δ-pinçado se $0 \leq \delta K(\pi_1) \leq K(\pi_2)$, para todos planos $\pi_1, \pi_2 \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 4.8. *Um conjunto $F \subset \mathscr{C}_B(V)$ é denominado Conjunto Pinçante se satisfaz as seguintes condições*

(a) *F é fechado, convexo e $O(n)$-invariante;*

(b) *F é invariante pela E.D.O. de Hamilton $\frac{d}{dt}R = Q(R)$;*

(c) *Para cada $\delta \in (0,1)$, o conjunto $\{R \in F; R$ não é fracamente δ-pinçado$\}$ é limitado.*

A partir de agora, consideraremos M uma variedade compacta de dimensão $n \geq 3$ e g_0 uma métrica em M com curvatura escalar positiva. Seja $g(t)$, $t \in [0,T)$, a única solução maximal do fluxo de Ricci com condição inicial $g(0) = g_0$.

Notações: Para cada $(p,t) \in M \times [0,T)$, denotaremos

$$K_{\max}(p,t) = \sup_{\pi \subset \mathbb{R}^n} K(R_{(p,t)}, \pi) \ \text{ e } \ K_{\min}(p,t) = \inf_{\pi \subset \mathbb{R}^n} K(R_{(p,t)}, \pi).$$

Também denotaremos

$$K_{\max}(t) = \sup_{p \in M} K_{\max}(p,t) \ \text{ e } \ K_{\min}(t) = \inf_{p \in M} K_{\min}(p,t).$$

Observação 4.5. *Se $R_{(p,t)}$ é estritamente δ-pinçado então*

$$\frac{K_{\min}(p,t)}{K_{\max}(p,t)} > \delta.$$

Se $R_{(p,t)}$ é δ-pinçado então

$$\frac{K_{\min}(p,t)}{K_{\max}(p,t)} \geq \delta.$$

Daqui por diante, suporemos que existe um conjunto pinçante $F \in \mathscr{C}_B(V)$ tal que $R_{(p,0)} \in F_{(p,0)}$, $\forall p \in M$.

Lema 4.3. *Dado $\delta \in (0,1)$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$K_{\min}(p,t) \geq \delta K_{\max}(p,t) - C,$$

$\forall p \in M$ e $\forall t \in [0,T)$. Em particular, temos que $K_{\min}(p,t) \geq -C/(1-\delta)$.

Demonstração.

Pelo Teorema 4.1 já sabemos que $R_{(p,t)} \in F_{(p,t)}$, $\forall (p,t) \in M \times [0,T)$. Dividiremos esta demonstração em dois casos.

(a) Se $R_{(p,t)}$ é δ-pinçado, temos que

$$\frac{K_{\min}(p,t)}{K_{\max}(p,t)} \geq \delta \Longrightarrow K_{\min}(p,t) \geq \delta K_{\max}(p,t) - C,$$

para todo $C > 0$.

(b) Suponha agora que $R_{(p,t)}$ não é δ-pinçado. Como $R_{(p,t)} \in F_{(p,t)}$ e F é um conjunto pinçante, temos que existe $C > 0$, tal que

$$\|R_{(p,t)}\| < \frac{C}{2}.$$

Como $|K_{\max}(p,t)| \geq \|R_{(p,t)}\|$ e $|K_{\min}(p,t)| \leq \|R_{(p,t)}\|$, teremos para todo $\delta \in (0,1)$ e para todo $(p,t) \in M \times [0,T)$,

$$K_{\min}(p,t) - \delta K_{\max}(p,t) \geq K_{\min}(p,t) - K_{\max}(p,t) \geq -\frac{C}{2} - \frac{C}{2} = -C,$$

o que conclui a demonstração

A segunda afirmação segue diretamente da primeira, pois $K_{\min}(p,t) \leq K_{\max}(p,t)$.

□

Corolário 4.2. *Para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante $L > 0$ tal que*

$$\| \overset{o}{Ric}_{g(t)} \| \leq \varepsilon K_{\max}(t) + L$$

Demonstração. Inicialmente, note que

$$\| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t)} \|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{2}_{i,j} \leq L_1 \sup_{|v|=|w|=1} \overset{o}{\mathrm{Ric}}\,(v,w)^2,$$

onde L_1 é uma constante que depende apenas de n. Lembrando a definição de $\overset{o}{\mathrm{Ric}}$, teremos

$$\| \overset{o}{\mathrm{Ric}} \| \leq C_2 \left\{ \sup_{|v|=|w|=1} [\mathrm{Ric}(v+w, v+w)) - \mathrm{Ric}(v-w, v-w)] + \frac{\mathrm{scal}}{n}(|v-w|^2 - |v+w|^2) \right\}. \tag{4.17}$$

Considere um vetor não nulo $z \in \mathbb{R}^n$ e $e_n = z/|z|$. Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Daí, se $|z|^2 \leq C_3$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(z,z) &= |z|^2 \sum_{i=1}^{n-1} R(e_n, e_i, e_n, e_i) \\ &\leq C_3(n-1)K_{\max}(t). \end{aligned}$$

Similarmente podemos ver que $\mathrm{Ric}(z,z) \geq \tilde{C}_3(n-1)K_{\min}(t)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathrm{scal} &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k\neq i}^{n} R(e_i, e_k, e_i, e_k) \\ &\leq n(n-1)K_{\max}(t). \end{aligned}$$

Como $|v| = |w| = 1$, segue que existe $C_3 > 0$ tal que $|v+w|, |v-w| \leq C_3$. Substituindo as observações feitas acima em (4.17), temos

$$\begin{aligned} \| \overset{o}{\mathrm{Ric}} \| &\leq C_4[(n-1)(K_{\max}(t) - K_{\min}(t)) + (n-1)K_{\max}(t)] \\ &= C_4(n-1)(2K_{\max}(t) - K_{\min}(t)). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Fixado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta \in (0, 1/2]$ tal que $3C_4(n-1)(1-\delta) < \varepsilon$. Como $\delta \in (0, 1/2]$ segue que

$$\frac{2-\delta}{3(1-\delta)} \leq 1.$$

Em vista do Lema 4.3, segue que existe uma constante $C > 0$ tal que $K_{\min}(p,t) \geq \delta K_{\max}(p,t) - C$. Substituindo em (4.18) e utilizando as observações anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} \| \overset{o}{\mathrm{Ric}} \| &\leq C_4(n-1)[(2-\delta)K_{\max}(t) + C] \\ &\leq \varepsilon \frac{2-\delta}{3(1-\delta)} K_{\max}(t) + CC_4(n-1) \\ &\leq \varepsilon K_{\max}(t) + L, \end{aligned}$$

onde L é uma constante maior que 0.

□

Lema 4.4. *Temos que* $T < \infty$ *e* $\limsup_{t \to T} K_{\max}(t) = \infty$.

Demonstração. Como estamos considerando scal > 0, segue da Proposição 2.9 que $T < \infty$.

Supondo que $\sup_{t \in [0,T)} K_{\max}(t) < \infty$, teríamos do Lema 4.3 que $\inf_{t \in [0,T)} K_{\min}(t) > -\infty$. Unindo estes fatos e usando o Corolário 1.1, chegaremos que $\sup_{t \in [0,T)} \|R_{g(t)}\| < \infty$. Mas isto é uma contradição, em vista do Teorema 2.2. Assim, $\limsup_{t \to T} K_{\max(t)} = \infty$.

□

Lema 4.5. *Seja* t_k *uma sequência tal que* $\lim_{k \to \infty} t_k = T$ *e* $K_{\max}(t_k) \geq \frac{1}{2} \max_{t \in [0, t_k]} K_{\max}(t)$. *Então*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{K_{\min}(t_k)}{K_{\max}(t_k)} = 1$$

Demonstração. Fixe $0 < \varepsilon < 1$. Pelo Corolário 4.2, já vimos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\sup_M \| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t)} \| \leq \varepsilon K_{max}(t) + C_1, \forall t \in [0, T).$$

Assim, usando nossa hipótese inicial,

$$\sup_M \| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t)} \| \leq 2\varepsilon K_{max}(t_k) + C_1, \forall t \in [0, t_k]. \tag{4.19}$$

Já vimos no Capítulo 2 que o tensor $\overset{o}{\mathrm{Ric}}$ satisfaz a equação de evolução

$$\frac{\partial}{\partial t} \overset{o}{\mathrm{Ric}} = \Delta \overset{o}{\mathrm{Ric}} + R * \overset{o}{\mathrm{Ric}} . \tag{4.20}$$

Segue do Lema de Berger (cf. Lema 1.1) que

$$\|R_{g(t)}\| \leq \frac{4}{3}|K_{max}(t)| \leq \frac{8}{3}|K_{max}(t_k)|, \forall t \in [0, t_k]. \tag{4.21}$$

Visto (4.19), (4.20) e (4.21), podemos utilizar a Estimativa de Shi (cf. Proposição 2.11), para garantir que existe uma constante $C_2(n) > 0$ tal que

$$\sup \|D \overset{o}{\mathrm{Ric}} \|^2 \leq C_2(n)|K_{max}(t_k)|(2\varepsilon K_{max}(t_k) + C_1)^2. \tag{4.22}$$

Como $\operatorname{div} \overset{o}{\mathrm{Ric}} = \frac{n-2}{2n} D\mathrm{scal}$ e $n \geq 3$, segue que

$$\begin{aligned} \|d\mathrm{scal}\| &= \frac{2n}{n-2} \| \operatorname{div} \overset{o}{\mathrm{Ric}} \| && (4.23) \\ &\leq \frac{2n}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \|D_{e_i} \overset{o}{\mathrm{Ric}} \| && (4.24) \\ &\leq \frac{2n^2}{n-2} \sup_M \|D \overset{o}{\mathrm{Ric}} \|. && (4.25) \end{aligned}$$

Substituindo em (4.22), teremos

$$\sup_M \|d\mathrm{scal}\|^2 \leq C_3(n)^2 |K_{max}(t_k)|(2\varepsilon K_{max}(t_k) + C_1)^2, \tag{4.26}$$

para alguma constante positiva $C_3(n)$.

Como M é um conjunto compacto, é possível escolher $p_k \in M$ tal que $K_{max}(p_k, t_k) = K_{max}(t_k)$. Além disso, como $\mathrm{scal}_{g(t_k)}$ é uma função suave definida na variedade compacta M, temos que $\mathrm{scal}_{g(t_k)}$ é uma função Lipschitz em M. Assim, utilizando (4.26), concluímos que

$$|\mathrm{scal}_{g(t_k)}(x) - \mathrm{scal}_{g(t_k)}(p_k)| \leq C_3(n)\sqrt{K_{max}(t_k)}(2\varepsilon K_{max}(t_k) + C_1) d_{g(t_k)}(p_k, x), \tag{4.27}$$

onde $d_{g(t_k)}$ é a distância induzida pela métrica $g(t_k)$.

A partir de agora, considere $r > \pi$ e denote por $r_k = \frac{r}{K_{max}(t_k)}$. Além disso, considere as bolas

$$\Omega_k := \left\{ x \in M; d_{g(t_k)}(x, p_k) \leq r_k \right\}$$

De (4.27), segue que

$$|\mathrm{scal}_{g(t_k)}(x) - \mathrm{scal}_{g(t_k)}(p_k)| \leq C_3(n)r(2\varepsilon K_{max}(t_k) + C_1), \forall x \in \Omega_k. \tag{4.28}$$

Como $\varepsilon \in (0,1)$, segue de (4.28) e do Lema 4.3 que, se $x \in \Omega_k$, então

$$\begin{aligned}
K_{min}(x,t_k) &\geq (1-\varepsilon)K_{max}(x,t_k) - L_1 \\
&\geq (1-\varepsilon)\frac{\mathrm{scal}_{g(t_k)}(x)}{n(n-1)} - L_1 \\
&\geq (1-\varepsilon)\frac{\mathrm{scal}_{g(t_k)}(p_k)}{n(n-1)} - (1-\varepsilon)\frac{C_3(n)r(2\varepsilon K_{max}(t_k) + C_1)}{n(n-1)} - L_1. \\
&\geq (1-\varepsilon)K_{min}(p_k,t_k) - \frac{C_3(n)r}{n(n-1)}2\varepsilon K_{max}(t_k) - L_2(\varepsilon) \\
&\geq (1-\varepsilon)[(1-\varepsilon)K_{max}(p_k,t_k) - L_1] - rC_4(n)\varepsilon K_{max}(t_k) - L_2(\varepsilon) \\
&\geq [(1-\varepsilon)^2 - rC_4(n)\varepsilon]K_{max}(t_k) - L_3(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Pela forma que foram obtidas, segue que $C_4(n)$ e $L_3(\varepsilon)$ são constantes positivas que dependem de n e ε, respectivamente.

Portanto,

$$\frac{K_{min}(x,t_k)}{K_{max}(t_k)} \geq (1-\varepsilon)^2 - rC_4(n)\varepsilon - \frac{L_3(\varepsilon)}{K_{max}(t_k)}.$$

Daí, usando o Lema 4.4, teremos

$$\liminf_{k\to\infty}\left(\inf_{x\in\Omega_k}\frac{K_{min}(x,t_k)}{K_{max}(t_k)}\right) \geq (1-\varepsilon)^2 - rC_4(n)\varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, chegaremos que

$$\liminf_{k\to\infty}\left(\inf_{x\in\Omega_k}\frac{K_{min}(x,t_k)}{K_{max}(t_k)}\right) \geq 1. \tag{4.29}$$

Por outro lado, como $K_{min}(x,t_k) \leq K_{max}(t_k)$, temos que

$$\limsup_{k\to\infty}\left(\inf_{x\in\Omega_k}\frac{K_{min}(x,t_k)}{K_{max}(t_k)}\right) \leq 1. \tag{4.30}$$

De (4.29) e (4.30), segue que

$$\lim_{k\to\infty}\left(\inf_{x\in\Omega_k}\frac{K_{min}(x,t_k)}{K_{max}(t_k)}\right) = 1. \tag{4.31}$$

A partir de agora escolha $\eta \in (0,1)$ tal que $r > \frac{\pi}{\sqrt{1-\eta}}$. Por (4.31), podemos tomar k suficientemente grande de forma que

$$K_{min}(x,t_k) \geq (1-\eta)K_{max}(t_k), \forall x \in \Omega_k.$$

Tome $v \in T_{p_k}M$ tal que $\|v\|_{g(t_k)} = 1$ e defina uma geodésica minimizante $\gamma_v : [0, r_k] \longrightarrow M$ com condições iniciais $\gamma_v(0) = p_k$ e $\gamma_v'(0) = v$. Como $\ell(\gamma_v) = r_k$ e $p_k \in \gamma_v$, segue que $\gamma_v([0, r_k]) \subset \overline{\Omega}_k$. Por outro lado,

$$r_k > \frac{\pi}{\sqrt{(1-\eta)K_{max}(t_k)}},$$

$$K(M, g(t_k)) \geq K_{max}(p_k, t_k) = K_{max}(t_k)$$

e

$$\ell(\gamma_v) > \frac{\pi}{\sqrt{K_{max(t_k)}}}.$$

Segue do Teorema de Bonnet-Myers (cf. Teorema 1.2) que $\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{K_{max(t_k)}}}$. Desta forma $M = \Omega_k$. Usando (4.31) concluiremos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{K_{min}(t_k)}{K_{max}(t_k)} = 1$$

□

Proposição 4.5. *Temos que*

$$\frac{K_{min}(t)}{K_{max}(t)} \to 1,$$

quando $t \to T$.

Demonstração. Considere uma sequência $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de tempos tal que $\lim t_k = T$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere $\tau_k \in [0, t_k]$ tal que $K_{max}(\tau_k) = \sup_{t\in[0,t_k]} K_{max}(t)$. Como já vimos que $\limsup_{t\to T} K_{max}(t) = \infty$, segue das estimativas de Shi que $\tau_k \to T$. Além disso,

$$\begin{aligned} K_{max}(\tau_k) &\geq \sup_{t\in[0,\tau_k]} K_{max}(t) \\ &\geq \frac{1}{2} \sup_{t\in[0,\tau_k]} K_{max}(t). \end{aligned}$$

Assim, usando o Lema 4.5, temos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{K_{min}(\tau_k)}{K_{max}(\tau_k)} = 1.$$

Daí, se k é suficientemente grande, podemos supor que $K_{min}(\tau_k) \geq \frac{1}{2} K_{max}(\tau_k)$. Como já vimos que a função $t \mapsto \inf_M \mathrm{scal}_{g(t)}$ é uma função não decrescente, concluímos que, para k suficientemente grande,

$$
\begin{aligned}
K_{max}(t_k) &\geq \frac{1}{n(n-1)} \inf_M scal_{g(t_k)} \\
&\geq \frac{1}{n(n-1)} \inf_M scal_{g(\tau_k)} \\
&\geq K_{min}(\tau_k) \\
&\geq \frac{1}{2} K_{max}(\tau_k) \\
&\geq \frac{1}{2} max_{t \in [0,t_k]} K_{max}(t).
\end{aligned}
$$

Desta desigualdade e do Lema 4.5, segue a Proposição.

□

Corolário 4.3. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $T_0 \in [0, T)$, tal que*

$$
\| \overset{o}{Ric}_{g(t)} \|^2 \leq \frac{\varepsilon}{n} scal^2_{g(t)}, \forall t \in [T_0, T)
$$

Demonstração. Se a afirmação do Corolário fosse falsa, seria possível escolher uma sequência de tempos $t_k \in [T - 1/k, T)$ tal que $\| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t_k)} \|^2 > \frac{\varepsilon}{n} \mathrm{scal}^2_{g(t_k)}$. Como

$$
\|\mathrm{Ric}_{g(t)}\|^2 = \| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t)} \|^2 + \frac{1}{n} \mathrm{scal}^2_{g(t)},
$$

segue que

$$
\|\mathrm{Ric}_{g(t_k)}\|^2 > \frac{1+\varepsilon}{n} \mathrm{scal}^2_{g(t_k)}.
$$

Pela Proposição 4.5, podemos escolher k_0 suficientemente grande de forma que

$$
\frac{K_{min}(t)}{K_{max}(t)} > \frac{1}{1+\varepsilon}, \forall t \in \left(T - \frac{1}{k_0}, T \right]. \tag{4.32}
$$

Assim, se $k > k_0$, temos

$$
\begin{aligned}
K_{max}(t_k)^2 \geq \frac{1}{(n-1)^2} \|\mathrm{Ric}_{g(t_k)}\|^2 &> \frac{1+\varepsilon}{n(n-1)^2} \mathrm{scal}^2_{g(t_k)} \\
&\geq n(1+\varepsilon) K_{min}(t_k)^2.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\frac{K_{min}(t_k)}{K_{max}(t_k)} < \frac{1}{(1+\varepsilon)n} < \frac{1}{1+\varepsilon},
$$

o que é um absurdo em vista de (4.32).

$\square$

Lema 4.6. *Temos que*

$$(T-t)\sup_M scal_{g(t)} \to \frac{n}{2} \tag{4.33}$$

e

$$(T-t)\inf_M scal_{g(t)} \to \frac{n}{2}, \tag{4.34}$$

quando $t \to T$.

Demonstração.
Fixe $\varepsilon > 0$. Lembrando a equação de evolução de scal e utilizando o Corolário 4.3, segue que existe $T_0 \in [0,T)$, tal que

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{scal} = \Delta\mathrm{scal} + 2\|\mathrm{Ric}\|^2 \leq \Delta\mathrm{scal} + \frac{2(1+\varepsilon)}{n}\mathrm{scal}^2, \tag{4.35}$$

para todos $(p,t) \in M \times [T_0, T)$.
Segue do Princípio do Mínimo escalar aplicado à (4.35) que

$$\sup_M \mathrm{scal}_{g(\tau)} \leq \frac{n\sup_M \mathrm{scal}_{g(t)}}{n - 2(1+\varepsilon)\sup\limits_M \mathrm{scal}_{g(t)}(\tau - t)},$$

para todo $t \in [T_0, T)$ e todo $\tau \in [t, T)$. Reorganizando os termos, temos que

$$\frac{n}{2\sup\limits_M \mathrm{scal}_{g(\tau)}} + (1+\varepsilon)(\tau - t) \geq \frac{n}{2\sup\limits_M \mathrm{scal}_{g(t)}}, \tag{4.36}$$

para todo $t \in [T_0, T)$ e todo $\tau \in [t, T)$.
Como

$$\sup_M \mathrm{scal}_{g(\tau)} \geq n(n-1)K_{min}(\tau) = n(n-1)\left(\frac{K_{min}(\tau)}{K_{max}(\tau)}\right)K_{max}(\tau),$$

segue do Lema 4.4 e da Proposição 4.5 que $\limsup\limits_{\tau\to T}\sup\limits_M \mathrm{scal}_{g(\tau)} = \infty$.
Assim, fazendo $\tau \to T$ e $\varepsilon \to 0$ em (4.36), teremos

$$\liminf_{t\to T}\left[(T-t)\sup_M \mathrm{scal}_{g(t)}\right] \geq \frac{n}{2}. \tag{4.37}$$

Usando a Proposição 4.5, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{2} &\leq \liminf_{t\to T}\left[(T-t)\sup_M \operatorname{scal}_{g(t)}\right]\\
&\leq \liminf_{t\to T}\left[(T-t)n(n-1)\left(\frac{K_{max}(t)}{K_{min}(t)}\right)K_{min}(t)\right]\\
&\leq \liminf_{t\to T}\left[(T-t)\left(\frac{K_{max}(t)}{K_{min}(t)}\right)\inf_M \operatorname{scal}_{g(t)}\right]\\
&= \liminf_{t\to T}\left[(T-t)\inf_M \operatorname{scal}_{g(t)}\right].
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\liminf_{t\to T}\left[(T-t)\inf_M \operatorname{scal}_{g(t)}\right] \geq \frac{n}{2}. \tag{4.38}
$$

Usando a Proposição 2.9, temos que

$$
T-t \leq T \leq \frac{n}{2\inf\limits_M \operatorname{scal}_{g(t)}}, \forall t \in [0,T).
$$

Assim,

$$
\limsup_{t\to T}\left[(T-t)\inf_M \operatorname{scal}_{g(t)}\right] \leq \frac{n}{2} \tag{4.39}
$$

Utilizando a Proposição 4.5 de maneira análoga ao que fizemos concluímos que

$$
\limsup_{t\to T}\left[(T-t)\sup_M \operatorname{scal}_{g(t)}\right] \leq \frac{n}{2} \tag{4.40}
$$

Unindo (4.37) e (4.40) temos (4.33). Unindo (4.38) e (4.39) temos (4.34).

□

A partir de agora, nosso objetivo será encontrar resultados de convergência para as métricas rescalonadas $\tilde{g}(t) = \frac{g(t)}{T-t}$. Veremos que a família de métricas $\tilde{g}(t)$ converge para uma métrica de curvatura constante quando $t \to T$. Para utilizar os resultados do Teorema de Convergência de métricas em $\tilde{g}(t)$, precisamos controlar as derivadas covariantes de $\frac{d}{dt}\tilde{g}(t) = \frac{g(t)}{(T-t)^2} - 2\frac{\operatorname{Ric}_{g(t)}}{T-t}$.

Lema 4.7. *Se A é $(0,4)$-tensor definido por*

$$
A_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{n(n-1)} scal(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),
$$

então $\|A\|^2 = \|R\|^2 - \frac{2scal^2}{n(n-1)}$.

Ainda temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $T_1 \in (0,T)$ tal que

$$
\|A\|^2 \leq \varepsilon^2 scal^2_{g(t)},
$$

para todo $t \in (T_1, T)$.

Demonstração. De fato,

$$
\begin{aligned}
\|A\|^2 &= g^{ia}g^{jb}g^{kc}g^{ld}A_{ijkl}A_{abcd} \\
&= g^{ia}g^{jb}g^{kc}g^{ld}R_{ijkl}R_{abcd} \\
&+ \frac{\mathrm{scal}^2}{n^2(n-1)^2}(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})(g_{ac}g_{bd}-g_{ad}g_{bc})g^{ia}g^{jb}g^{kc}g^{ld} \\
&+ \frac{2\mathrm{scal}}{n(n-1)}g^{ia}g^{jb}g^{kc}g^{ld}R_{ijkl}(g_{ac}g_{bd}-g_{ad}g_{bc}).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|A\|^2 &= \|R\|^2 + \frac{\mathrm{scal}^2}{n^2(n-1)^2}(\delta_i^c\delta_j^d-\delta_i^d\delta_j^c)(\delta_c^i\delta_d^j-\delta_d^i\delta_c^j) \\
&\quad + \frac{2\mathrm{scal}}{n(n-1)}R_{ijkl}(\delta_c^i\delta_d^j g^{kc}g^{ld}-\delta_d^i\delta_c^j g^{kc}g^{ld}) \\
&= \|R\|^2 + \frac{2\mathrm{scal}^2}{n(n-1)} + \frac{4\mathrm{scal}}{n(n-1)}g^{ki}(g^{lj}R_{ijkl}) \\
&= \|R\|^2 + \frac{2\mathrm{scal}^2}{n(n-1)} - \frac{4\mathrm{scal}^2}{n(n-1)} \\
&= \|R\|^2 - \frac{2\mathrm{scal}^2}{n(n-1)}
\end{aligned}
$$

Agora, usando o Corolário 2.1, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\|R\|^2 - \frac{2\mathrm{scal}^2}{n(n-1)} &\leq C(K_{max}(t)-K_{min}(t))^2 + 2n(n-1)K_{max}(t)^2 - 2n(n-1)K_{min}(t)^2 \\
&= \left[C\left(\frac{K_{max}(t)}{K_{min}(t)}-1\right)^2 + 2n(n-1)\left(\frac{K_{max}(t)^2}{K_{min}(t)^2}-1\right)\right]K_{min}(t)^2 \\
&\leq \left[\frac{C}{n^2(n-1)^2}\left(\frac{K_{max}(t)}{K_{min}(t)}-1\right)^2 + \frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{K_{max}(t)^2}{K_{min}(t)^2}-1\right)\right]\mathrm{scal}^2.
\end{aligned}
$$

Usando a Proposição 4.5, a segunda assertiva segue.

$\square$

Lema 4.8. *Fixado $\alpha \in \left(0, \frac{1}{n-1}\right)$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\sup_M \| \overset{o}{Ric}_{g(t)} \|^2 \leq C(T-t)^{2\alpha-2}, \forall t \in [0,T).$$

Demonstração.

Antes de mais nada, fixe $\varepsilon > 0$ de forma que

$$\left(\frac{1}{n-1} - \alpha\right) \geq \left(n - 1 - \frac{1}{n-1} + n\varepsilon\right)\varepsilon.$$

Desta forma,

$$\left(1 - \frac{1}{n-1} + n\varepsilon\right)(1+\varepsilon) \geq (1-\alpha).$$

Em vista do Lema 4.6, existe $T_2 \in (0,T)$, tal que

$$(T-t)\mathrm{scal}_{g(t)} \leq \frac{n(1+\varepsilon)}{2}, \forall (p,t) \in M \times [T_2, T). \tag{4.41}$$

Pelo Lema 4.7, existe $T_1 \in (0,T)$ tal que

$$\left\| R_{ijkl} + \frac{1}{n(n-1)}\mathrm{scal}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\right\|^2 \leq \varepsilon^2 \mathrm{scal}^2_{g(t)}, \forall t \in (T_1, T). \tag{4.42}$$

Escolhendo $T_0 \in (0,T)$ de forma que valham (4.41) e (4.42), e lembrando que $\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{ij} = g^{im}g^{jn}\overset{o}{\mathrm{Ric}}_{mn}$, temos

$$\left[R_{ijkl} + \frac{1}{n(n-1)}\mathrm{scal}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\right]\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{ik}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{jl} \leq \varepsilon \mathrm{scal}_{g(t)} \| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t)} \|^2.$$

Observando que $g_{ik}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{ik} = tr(\overset{o}{\mathrm{Ric}}) = 0$ e $g_{il}g_{jk}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{ik}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{jl} = \| \overset{o}{\mathrm{Ric}} \|^2$, temos que

$$\begin{aligned}
R_{ijkl}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{ik}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{jl} &\leq \varepsilon \mathrm{scal}_{g(t)} \| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t)} \|^2 - \frac{\mathrm{scal}_{g(t)}}{n(n-1)}\left(g_{ik}g_{jl}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{ik}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{jl} - g_{il}g_{jk}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{ik}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{jl}\right) \\
&= \left(\frac{1}{n(n-1)} + \varepsilon\right)\mathrm{scal}_{g(t)} \| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t)} \|^2,
\end{aligned} \tag{4.43}$$

para todo $t \in [T_0, T)$.

Notando que $\mathrm{Ric}^{jl} = g^{mj}g^{nl}\mathrm{Ric}_{mn} = \overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{jl} + \frac{1}{n}\mathrm{scal}_{g(t)}g^{jl}$ e $\| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t)} \|^2 = \mathrm{Ric}_{ik}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{ik}$, e utilizando (4.41) e (4.43), temos

$$\begin{aligned}
R_{ijkl}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{ik}\mathrm{Ric}^{jl} &= R_{ijkl}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{ik}\left(\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{jl} + \frac{1}{n}\mathrm{scal}_{g(t)}g^{jl}\right) \\
&= R_{ijkl}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{ik}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{jl} - \frac{\mathrm{scal}}{n}\mathrm{Ric}_{ik}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{ik} \\
&= R_{ijkl}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{ik}\overset{o}{\mathrm{Ric}}{}^{jl} - \frac{\mathrm{scal}}{n}\| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t)} \|^2 \\
&\leq \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \varepsilon\right)\mathrm{scal}_{g(t)} \| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t)} \|^2 \\
&\leq \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \varepsilon\right)\frac{n(1+\varepsilon)}{2(T-t)} \| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t)} \|^2,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [T_0, T)$.

Usando o Corolário 2.3, concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\| \overset{o}{\mathrm{Ric}} \|^2) &= \Delta(\| \overset{o}{\mathrm{Ric}} \|^2) - 2\|D\mathrm{Ric}\|^2 + 4R_{ijkl} \overset{o}{\mathrm{Ric}}^{ik} \mathrm{Ric}^{jl} \\ &\leq \Delta(\| \overset{o}{\mathrm{Ric}} \|^2) - 2\|D\mathrm{Ric}\|^2 + \frac{2-2\alpha}{T-t}\| \overset{o}{\mathrm{Ric}} \|^2.\end{aligned}$$

Em vista desta desigualdade, utilizamos o Princípio do Máximo Escalar para garantir que existe uma constante $C > 0$, tal que $(T-t)^{2-2\alpha}\| \overset{o}{\mathrm{Ric}} \|^2 < C$, se $t \in [T_0, T)$. Disto segue o Lema.

□

Lema 4.9. *Fixados $\alpha \in \left(0, \frac{1}{n-1}\right)$ e $m \geq 1$ inteiro, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\sup_M \|D^m \overset{o}{Ric}_{g(t)} \|^2 \leq C(T-t)^{2\alpha - m - 2}, \forall t \in [0, T).$$

Demonstração. Pelo Lema 4.8, já sabemos que

$$\sup_M \| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t)} \| \leq C_1(T-t)^{\alpha - 1},$$

onde $C_1 > 0$ é uma constante. Lembrando que o tensor $\overset{o}{\mathrm{Ric}}$ satisfaz a equação de evolução

$$\frac{\partial}{\partial t} \overset{o}{\mathrm{Ric}} = \Delta \overset{o}{\mathrm{Ric}} + R * \overset{o}{\mathrm{Ric}},$$

usamos as estimativas de Shi para obter o resultado almejado.

□

Lema 4.10. *Fixados $\alpha \in \left(0, \frac{1}{n-1}\right)$ e $m \geq 1$ inteiro, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\sup_M \|D^m Ric_{g(t)}\|^2 \leq C(T-t)^{2\alpha - m - 2}, \forall t \in [0, T).$$

Demonstração. Da Proposição 1.1 segue que

$$(D_X \mathrm{Ric})(Y, Z) = (D_X \overset{o}{\mathrm{Ric}})(Y, Z) + \frac{2}{n-2} \sum_{k=1}^{n} (D_{e_k} \overset{o}{\mathrm{Ric}})(X, e_k) g(Y, Z),$$

para todos campos de vetores X, Y, Z, e $\{e_k\}$ referencial ortonormal. Portanto, as derivadas covariantes do tensor Ric podem ser limitadas pelas derivadas covariantes do tensor $\overset{o}{\mathrm{Ric}}$. Desta forma, a assertiva segue do Lema 4.9.

$\square$

Proposição 4.6. *Fixado* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{n-1}\right)$, *existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\sup_M \left\| Ric_{g(t)} - \frac{1}{2(T-t)} g(t) \right\|^2 \leq C(T-t)^{2\alpha-2}.$$

Demonstração. Lembrando da Proposição 1.1 que $\|\Delta \mathrm{scal}_{g(t)}\| \leq 2n\|D^2 \mathrm{Ric}_{g(t)}\|$, segue do Lema 4.10 que existe uma constante $C_1 > 0$, tal que

$$\|\Delta \mathrm{scal}_{g(t)}\| \leq C_1(T-t)^{\alpha-2}. \tag{4.44}$$

Pelo Lema 4.8, já vimos que existe uma constante $C_2 > 0$, tal que

$$\| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t)} \|^2 \leq C_2(T-t)^{2\alpha-2} \leq C_2 T^{\alpha}(T-t)^{\alpha-2}, \tag{4.45}$$

para todo $(p,t) \in M \times [0,T)$.

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{scal}_{g(t)} &= \Delta \mathrm{scal}_{g(t)} + 2\|\mathrm{Ric}_{g(t)}\|^2 \\ &= \Delta \mathrm{scal}_{g(t)} + 2\| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t)} \|^2 + \frac{2}{n}\mathrm{scal}^2_{g(t)}, \end{aligned}$$

temos de (4.44) e (4.45) que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{scal}_{g(t)} - \frac{2}{n}\mathrm{scal}^2_{g(t)} \right\| &\leq \|\Delta \mathrm{scal}_{g(t)}\| + 2\| \overset{o}{\mathrm{Ric}}_{g(t)} \|^2 \\ &\leq C_1(T-t)^{\alpha-2} + 2C_2T^{\alpha}(T-t)^{\alpha-2} \\ &= C_3(T-t)^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Como supomos no início que $\mathrm{scal}_{g(0)} > 0$, temos que $T < \infty$ e, portanto, $0 < C_3 < \infty$.

Lembre do Lema 4.6 que existe uma constante $C_4 > 0$, tal que $\mathrm{scal}^2_{g(t)}(T-t)^2 \geq C_4$, $\forall t \in [0,T)$. Assim,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\mathrm{scal}_{g(t)}} - \frac{2}{n}(T-t)\right] \right\| &= \frac{1}{\mathrm{scal}^2_{g(t)}} \left\| \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{scal}_{g(t)} - \frac{2}{n}\mathrm{scal}^2_{g(t)} \right\| \\ &\leq \frac{C_3(T-t)^{\alpha}}{\mathrm{scal}^2_{g(t)}(T-t)^2} \\ &\leq C_5(T-t)^{\alpha}, \end{aligned}$$

para todo $(p,t) \in M \times [0,T)$. C_5 é uma constante positiva que depende da dimensão e de T. Integrando a expressão acima, obtemos

$$\left\| \frac{1}{\mathrm{scal}_{g(t)}} - \frac{2}{n}(T-t) \right\| \leq \frac{C_5}{\alpha+1}(T-t)^{\alpha+1}.$$

Novamente pelo Lema 4.6, temos que $\frac{n}{2}\mathrm{scal}_{g(t)}(T-t)$ é limitado para todo $t \in [0,T)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathrm{scal}_{g(t)} - \frac{n}{2(T-t)}\right\| &= \frac{n\mathrm{scal}_{g(t)}}{2(T-t)}\left\|\frac{1}{\mathrm{scal}_{g(t)}} - \frac{2}{n}(T-t)\right\| \\
&\leq \frac{C_5}{\alpha+1}(T-t)^{\alpha-1}\left[\frac{n}{2}\mathrm{scal}_{g(t)}(T-t)\right] \\
&\leq C_6(T-t)^{\alpha-1}, \qquad (4.46)
\end{aligned}$$

onde $C_6 > 0$ e $(p,t) \in M \times [0,T)$.

De (4.45) e (4.46), concluiremos que

$$\begin{aligned}
\left\|\mathrm{Ric}_{g(t)} - \frac{1}{2(T-t)}g(t)\right\| &= \left\| \overset{o}{\mathrm{Ric}} + \frac{1}{n}\mathrm{scal}_{g(t)}g(t) - \frac{1}{2(T-t)}g(t)\right\| \\
&= \left\| \overset{o}{\mathrm{Ric}} + \frac{1}{n}\left(\mathrm{scal}_{g(t)} - \frac{n}{2(T-t)}\right)g(t)\right\| \\
&\leq \| \overset{o}{\mathrm{Ric}} \| + \left\|\mathrm{scal}_{g(t)} - \frac{n}{2(T-t)}\right\| \\
&\leq \tilde{C}(T-t)^{\alpha-1},
\end{aligned}$$

onde $\tilde{C} > 0$ e $(p,t) \in M \times [0,T)$. Disto segue nossa assertiva.

$\square$

Teorema 4.2 (R. Hamilton, [17]). *Considere M uma variedade compacta de dimensão $n \geq 3$ e g_0 uma métrica Riemanniana com curvatura escalar positiva. Suponha que exista um conjunto pinçante $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ tal que o tensor curvatura de g_0 pertença a F para todos os pontos de M. Seja $g(t)$, $t \in [0,T)$, a única solução maximal do Fluxo de Ricci com $g(0) = g_0$. Então, quando $t \to T$, as métricas rescalonadas $\tilde{g}(t) = \frac{1}{2(n-1)(T-t)}g(t)$ convergem em C^∞ para uma métrica de curvatura seccional constante igual a 1.*

Demonstração. Definindo $\omega(t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t)$, vemos que

$$\omega(t) = \frac{g(t)}{2(n-1)(T-t)^2} - \frac{\mathrm{Ric}_{g(t)}}{(n-1)(T-t)} = -\frac{1}{(n-1)(T-t)}\left[\mathrm{Ric}_{g(t)} - \frac{g(t)}{2(T-t)}\right].$$

Assumindo que D é a conexão de Levi-Civita de $g(t)$, temos

$$D^m\omega(t) = -\frac{D^m\mathrm{Ric}_{g(t)}}{(n-1)(T-t)}.$$

Segue da Proposição 4.6, que dado $\alpha \in \left(0, \frac{1}{n-1}\right)$, existe uma constante positiva C_0, que dependem apenas de α, tal que

$$\sup_M \|\omega(t)\|_{g(t)} \leq \frac{C_0}{n-1}(T-t)^{\alpha-2} \quad \text{e} \quad \sup_M \|D^m\omega(t)\|_{g(t)} \leq \frac{C_m}{n-1}(T-t)^{\alpha-\frac{m}{2}-2}.$$

Desta forma,

$$\|\omega(t)\|_{\tilde{g}(t)} = 2(n-1)(T-t)\|\omega(t)\|_{g(t)} \leq 2C_0(T-t)^{\alpha-1}.$$

Lembre que se $\tilde{D}$ representa a conexão de Levi-Civita da métrica rescalonada $\tilde{g}(t)$, então $\tilde{D} = D$. Portanto, utilizando o Lema 4.10, encontramos constantes positivas C_m tais que

$$\|\tilde{D}^m\omega(t)\|_{\tilde{g}(t)} = 2(n-1)(T-t)\|D^m\omega(t)\|_{g(t)} \leq 2C_m(T-t)^{\alpha-1-\frac{m}{2}} \leq 2C_m(T-t)^{\alpha-1}.$$

Feito isto, concluímos que

$$\int_0^T \|\tilde{D}^m\omega(t)\|_{\tilde{g}(t)}dt \leq C_m \int_0^T (T-t)^{\alpha-1}dt < \infty,$$

para todo $m \geq 0$ inteiro.

Segue do Teorema de Convergência de métricas, que as métricas $\tilde{g}(t)$ convergem na topologia C^∞ para uma métrica suave $\bar{g}$, quando $t \to T$. Pelo Lema 4.6, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{scal}_{\bar{g}} &= \lim_{t\to T} \mathrm{scal}_{\tilde{g}(t)} \\ &= \lim_{t\to T} 2(n-1)(T-t)\mathrm{scal}_{g(t)} \\ &= n(n-1). \end{aligned}$$

Utilizando a Proposição 4.5, vemos que

$$\frac{(K_{min})_{\bar{g}}}{(K_{max})_{\bar{g}}} = \lim_{t\to T} \frac{(K_{min})_{\tilde{g}(t)}}{(K_{max})_{\tilde{g}(t)}} = \lim_{t\to T} \frac{(K_{min})_{g(t)}}{(K_{max})_{g(t)}} = 1,$$

de onde $(K_{min})_{\bar{g}} = (K_{max})_{\bar{g}}$. Isto significa que $\bar{g}$ possui curvatura seccional constante K. Por outro lado,

$$\begin{aligned} n(n-1) = \mathrm{scal}_{\bar{g}} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} R(e_i, e_j, e_i, e_j) \\ &= n(n-1)K, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $\bar{g}$ tem curvatura seccional constante $K = 1$.

$\square$

4.4 O Fluxo de Ricci em dimensão três

No célebre artigo de Hamilton "Three Manifolds with positive Ricci curvature"([17]) de 1982, além de provar a existência e unicidade do Fluxo de Ricci, o autor também dedica-se ao estudo do Fluxo de Ricci em 3-variedades. Nesta seção, veremos que toda variedade compacta tridimensional que admite uma métrica com curvatura de Ricci positiva é difeomorfa a uma forma espacial esférica.

Nosso objetivo a partir de agora será, à luz do Teorema 4.2, construir um conjunto pinçante que contenha o tensor de curvatura da métrica de M.

Uma particularidade essencial das variedades tridimensionais é que o tensor de curvatura de Riemann é determinado pelo tensor de Ricci:

Lema 4.11. *Considere V como sendo um espaço vetorial de dimensão três munido de um produto interno $g(\cdot,\cdot)$. Se $R \in \mathscr{C}_B(V)$, então*

$$R_{ijkl} = Ric_{ik}g_{jl} - Ric_{il}g_{jk} - Ric_{jk}g_{il} + Ric_{jl}g_{ik} - \frac{1}{2}scal(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

Demonstração. Defina o $(0,4)$- tensor

$$\bar{R}_{ijkl} = R_{ijkl} - (\mathrm{Ric}_{ik}g_{jl} - \mathrm{Ric}_{il}g_{jk} - \mathrm{Ric}_{jk}g_{il} + \mathrm{Ric}_{jl}g_{ik}) + \frac{1}{2}\mathrm{scal}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).$$

Cálculos simples nos mostrarão que $\bar{R}$ é um tensor tal que $\bar{R}_{ijkl} = -\bar{R}_{jikl} = \bar{R}_{klij}$. Além disso, $\bar{R}$ satisfaz a 1^a Identidade de Bianchi. Desta forma, $\bar{R} \in \mathscr{C}_B(V)$.

Além do mais,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(\bar{R})_{jl} &= g^{ik}\bar{R}_{ijkl} \\
&= \mathrm{Ric}_{jl} - (\mathrm{scal}g_{jl} - \delta^i_j\mathrm{Ric}_{il} - \delta^k_l\mathrm{Ric}_{jk} + \delta^i_i\mathrm{Ric}_{jl}) + \frac{1}{2}\mathrm{scal}(\delta^i_i g_{jl} - \delta^i_j g_{il}) \\
&= \mathrm{Ric}_{jl} - \mathrm{scal}g_{jl} + \mathrm{Ric}_{jl} + \mathrm{Ric}_{jl} - 3\mathrm{Ric}_{jl} + \frac{1}{2}\mathrm{scal}(3g_{jl} - g_{jl}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Considere uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de V e os planos $\pi_1 = [e_2, e_3]$, $\pi_2 = [e_1, e_3]$ e $\pi_3 = [e_1, e_2]$. Veja que

$$K_{\bar{R}}(\pi_1) + K_{\bar{R}}(\pi_2) = \bar{R}(e_2, e_3, e_2, e_3) + \bar{R}(e_1, e_3, e_1, e_3) = \mathrm{Ric}(\bar{R})(e_3, e_3) = 0$$

Analogamente, podemos ver que $K_{\bar{R}}(\pi_1) + K_{\bar{R}}(\pi_3) = 0$ e $K_{\bar{R}}(\pi_2) + K_{\bar{R}}(\pi_3) = 0$. Daí, temos que $K_{\bar{R}}(\pi_1) = K_{\bar{R}}(\pi_2) = K_{\bar{R}}(\pi_3) = 0$, de onde concluímos que todas as curvaturas seccionais de $\bar{R}$ são zero. Isto implica que $\bar{R} = 0$.

□

A partir de agora, consideraremos $V = \mathbb{R}^3$ munido com a métrica canônica, isto é, $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Proposição 4.7. *Supondo que $R(t)$, $t \in [0,T)$, é uma solução da E.D.O. $\frac{d}{dt}R(t) = Q(R(t))$ em $\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$, temos*

$$\frac{d}{dt}Ric_{ij} = -4Ric^2_{ij} + 3scalRic_{ij} + 2\|Ric\|^2\delta_{ij} - scal^2\delta_{ij},$$

para todo $t \in [0,T)$.

Demonstração. Como $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ e $\mathrm{Ric}_{ij} = \sum_{k=1}^{3} R_{ikjk}$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{Ric}_{ij} &= \sum_{k=1}^{3} Q(R)_{ikjk} \\ &= 2\sum_{p,q=1}^{3} \mathrm{Ric}_{pq}R_{ipjq}.\end{aligned}$$

Observe que, em nosso caso,

$$\|\mathrm{Ric}\|^2 = \delta^{ik}\delta^{jl}\mathrm{Ric}_{ij} = \sum_{i,j=1}^{3}\mathrm{Ric}^2_{ij}.$$

Desta forma, usando o Lema 4.11, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{Ric}_{ij} &= 2\sum_{p,q=1}^{3}\mathrm{Ric}_{pq}\left[(\mathrm{Ric}_{ij}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{iq}\delta_{jp} - \mathrm{Ric}_{jp}\delta_{iq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{ij}) - \frac{1}{2}\mathrm{scal}(\delta_{ij}\delta_{pq} - \delta_{iq}\delta_{jp})\right] \\ &= 2\mathrm{scal}\mathrm{Ric}_{ij} + 2\|\mathrm{Ric}\|^2\delta_{ij} - \mathrm{scal}^2\delta_{ij} + \mathrm{Ric}_{ij}\mathrm{scal} - 4\mathrm{Ric}^2_{ij} \\ &= -4\mathrm{Ric}^2_{ij} + 3\mathrm{scal}\mathrm{Ric}_{ij} + 2\|\mathrm{Ric}\|^2\delta_{ij} - \mathrm{scal}^2\delta_{ij}.\end{aligned}$$

□

Dado um tensor de curvatura algébrico $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$, consideraremos o $(0,2)$-tensor simétrico

$$A_{ij} = \mathrm{scal}(R)\delta_{ij} - 2\mathrm{Ric}(R)_{ij}.$$

Como A é uma forma bilinear simétrica, podemos considerar uma base ortonormal de autovetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ de A com autovalores associados $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$. Cada λ_i é uma função real em $\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$.

A partir de agora, considere as funções sobre $\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$: $R \mapsto \lambda_1$, $R \mapsto \lambda_3$ e $R \mapsto \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{scal}$. É fácil notar que se $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ são os autovalores associados a uma base de autovetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $A_{ij} = \mathrm{scal}\delta_{ij} - 2\mathrm{Ric}_{ij}$ então $\{v_1, v_2, v_3\}$ também é uma base de autovetores de Ric com autovalores associados $\mu_i = \frac{\mathrm{scal}-\lambda_i}{2}$.

Lema 4.12. *$R \mapsto \lambda_1$ é côncava, $R \mapsto \lambda_3$ é convexa e $R \mapsto scal$ é linear.*

Demonstração. A linearidade de scal segue diretamente.

Se $R, S \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$ e $\mu_1(R)$, $\mu_1(S)$ são os maiores autovalores das formas bilineares $\mathrm{Ric}(R)$, $\mathrm{Ric}(S)$, respectivamente, temos que

$$\mu_1(R) = \sup_{|v|=1} |\mathrm{Ric}(R)(v,v)| \text{ e } \mu_1(S) = \sup_{|v|=1} |\mathrm{Ric}(S)(v,v)|.$$

Assim, se $a, b > 0$ são reais, usamos a linearidade de Ric para obter que

$$\mu_1(aR + bS) = \sup_{|v|=1} |a\mathrm{Ric}(R)(v,v) + b\mathrm{Ric}(S)(v,v)| \leq a\mu_1(R) + b\mu_1(S).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lambda_1((1-t)R + tS) &= \mathrm{scal}((1-t)R + tS) - 2\mu_1((1-t)R + tS) \\
&\geq (1-t)\mathrm{scal}(R) + t\mathrm{scal}(S) - 2(1-t)\mu_1(R) - 2t\mu_1(S) \\
&= (1-t)(\mathrm{scal}(R) - 2\mu_1(R)) + t(\mathrm{scal}(S) - 2\mu_1(S)) \\
&= (1-t)\lambda_1(R) + t\lambda_1(S).
\end{aligned}$$

Assim $R \mapsto \lambda_1$ é uma função côncava. Por um raciocínio análogo, pode-se ver que $R \mapsto \lambda_1$ é uma função convexa.

□

Para facilitar as notações escreveremos $A, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, R, \mathrm{Ric}$ representando as mesmas quantidades em função do tempo. Assim, só especificaremos o tempo quando necessário.

Proposição 4.8. *Se $R(t)$, $t \in [0, T)$, é uma solução da E.D.O. $\frac{d}{dt}R(t) = Q(R(t))$ em $\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$, então*

$$\frac{d}{dt}A_{ij} = 2A_{ij}^2 - tr(A)A_{ij} - \frac{1}{2}\|A\|^2\delta_{ij} - scal^2\delta_{ij},$$

para todo $t \in [0, T)$.

Demonstração.

Antes de mais nada, observe que

$$A_{ij}^2 = \mathrm{scal}^2\delta_{ij} - 4\mathrm{scal}\mathrm{Ric}_{ij}\delta_{ij} + 4\mathrm{Ric}_{ij}^2, \tag{4.47}$$

$$tr(A)A_{ij} = \mathrm{scal}^2\delta_{ij} - 2\mathrm{scal}\mathrm{Ric}_{ij}, \tag{4.48}$$

$$\frac{1}{2}\|A\|^2\delta_{ij} = \frac{1}{2}(4\|\mathrm{Ric}\|^2 - \mathrm{scal}^2)\delta_{ij} \tag{4.49}$$

e

$$\frac{1}{2}tr(A)^2\delta_{ij} = \frac{1}{2}\mathrm{scal}^2\delta_{ij}. \tag{4.50}$$

Como

$$\frac{d}{dt}\mathrm{scal} = 2\|\mathrm{Ric}\|^2,$$

segue da Proposição 4.7 e das identidades (4.47), (4.48), (4.49), (4.50) que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A_{ij} &= \left(\frac{d}{dt}\mathrm{scal}\right)\delta_{ij} - 2\frac{d}{dt}\mathrm{Ric}_{ij} \\
&= 8\mathrm{Ric}_{ij}^2 - 6\mathrm{scal}\mathrm{Ric}\delta_{ij} - 2\|\mathrm{Ric}\|_{ij}^2 + 2\mathrm{scal}^2\delta_{ij} \\
&= 2A_{ij}^2 - tr(A)A_{ij} - \frac{1}{2}\|A\|^2\delta_{ij} - \mathrm{scal}^2\delta_{ij}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 4.9. *Se $R(t)$ é uma solução da E.D.O. $\frac{d}{dt}R(t) = Q(R(t))$ em $\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$, então os autovalores $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \lambda_3(t)$ de $A(t)$ satisfazem*

$$\begin{cases}
\frac{d}{dt}\lambda_1(t) = \lambda_1(t)^2 + \lambda_2(t)\lambda_3(t) \\
\frac{d}{dt}\lambda_2(t) = \lambda_2(t)^2 + \lambda_1(t)\lambda_3(t) \\
\frac{d}{dt}\lambda_3(t) = \lambda_3(t)^2 + \lambda_1(t)\lambda_2(t),
\end{cases}$$

para todo $t \in [0, T)$.

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que a matriz $A(0)$ está diagonalizada e que $A_{11}(0) \leq A_{22}(0) \leq A_{33}(0)$. Se $i \neq j$, temos da Proposição 4.8 que

$$\begin{cases}
\frac{d}{dt}A_{ij}(t) = 2A_{ij}^2 - tr(A)A_{ij} \\
A_{ij}(0) = 0.
\end{cases}$$

Segue do Teorema de existência e unicidade para solução de EDO's que $A_{ij}(t) = 0$ se $i \neq j$, ou seja, podemos supor que $A(t)$ é uma matriz diagonal para todo $t \in [0, T)$.

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A_{11}(t) &= 2A_{11}(t)^2 - tr(A(t))A_{11}(t) - \frac{1}{2}(A_{11}(t)^2 + A_{22}(t)^2 + A_{33}(t)^2) + \frac{1}{2}(tr(A(t))^2 \\
&= A_{11}(t)^2 + A_{22}(t)A_{33}(t).
\end{aligned}$$

Podemos encontrar identidades análogas para $A_{22}(t)$ e $A_{33}(t)$. Isto significa que temos o sistema

$$\begin{cases}
\frac{d}{dt}A_{11}(t) = A_{11}(t)^2 + A_{22}(t)A_{33}(t) \\
\frac{d}{dt}A_{22}(t) = A_{22}(t)^2 + A_{11}(t)A_{33}(t) \\
\frac{d}{dt}A_{33}(t) = A_{33}(t)^2 + A_{11}(t)A_{22}(t).
\end{cases}$$

Para finalizar esta demontração basta vermos que $A_{11}(t) = \lambda_1(t)$, $A_{22}(t) = \lambda_2(t)$ e $A_{33}(t) = \lambda_3(t)$, para todo $t \in [0, T)$. Como $A(t)$ é uma matriz diagonal, basta mostrarmos que $A_{11}(t) \leq A_{22}(t) \leq A_{33}(t)$, para todo $t \in [0, T)$.

Por absurdo, suponha que exista um $\tau_0 \in (0,T)$ tal que $A_{11}(\tau_0) > A_{22}(\tau_0)$. Como $A_{11}(0) \leq A_{22}(0)$, seria possível encontrar $\tau \in (0,\tau_0)$ tal que $A_{11}(\tau) = A_{22}(\tau)$.

Desta forma se definimos $\varphi(t) = A_{22}(t) - A_{11}(t)$, temos que φ satisfaz a E.D.O.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\varphi(t) & = & \varphi(t) \quad (A_{11}(t) + A_{22}(t)) - A_{33}(t)) \\ \varphi(\tau) & = & 0. \end{array} \right.$$

Pela unicidade da solução desta E.D.O., segue que $\varphi = 0$, o que é uma absurdo pois supomos inicialmente que $\varphi(\tau_0) > 0$.

Um argumento análogo nos mostrará que $A_{22}(t) \leq A_{33}(t)$, para todo $t \in [0,T)$. Portanto, $A_{11}(t) = \lambda_1(t)$, $A_{22}(t) = \lambda_2(t)$ e $A_{33}(t) = \lambda_3(t)$, para todo $t \in [0,T)$.

□

Proposição 4.10. *Fixado $\delta \in [0,1]$, o conjunto*

$$\left\{ R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3); \lambda_1 + \lambda_2 \geq 2\delta\lambda_3 \right\}$$

é invariante pela E.D.O. de Hamilton $\frac{d}{dt}R(t) = Q(R(t))$.

Demonstração. Considere $R(t)$ uma solução da E.D.O de Hamilton tal que $\lambda_1(0) + \lambda_2(0) \geq 2\delta\lambda_3(0)$. Utilizando a Proposição 4.9, temos

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\delta\lambda_3) & = & \lambda_1^2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_3 - 2\delta(\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2) \\ & = & (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\delta\lambda_3)\lambda_3 + (1-\delta)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \delta(\lambda_1 - \lambda_2)^2. \end{array}$$

Assim, se existir um $\tau \in (0,T)$ tal que $(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\delta\lambda_3)(\tau) = 0$ segue que $\frac{d}{dt}(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\delta\lambda_3)(\tau) \geq 0$.

□

Proposição 4.11. *Fixados $\delta \in [0,1]$ e $N > 0$, o conjunto*

$$\left\{ R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3); \lambda_1 + \lambda_2 \geq 2\delta\lambda_3 \quad e \quad (\lambda_3 - \lambda_1)^{1+\delta} \leq N(\lambda_1 + \lambda_2) \right\}$$

é invariante pela E.D.O. de Hamilton $\frac{d}{dt}R(t) = Q(R(t))$.

Demonstração.

Antes de mais nada, podemos assumir que $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 2\delta\lambda_3$ pois já vimos na Proposição 4.10 que esta condição é preservada pela E.D.O. de Hamilton.

Utilizando a Proposição 4.9, veremos que

$$\frac{d}{dt}\log(\lambda_3 - \lambda_1) = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \leq \lambda_3.$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\log(\lambda_1+\lambda_2) &= \frac{\lambda_1^2+\lambda_2\lambda_3\lambda_2^2+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}\\
&= \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{\lambda_1+\lambda_2}+\lambda_3\\
&\geq \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_3\\
&\geq (1+\delta)\lambda_3.
\end{aligned}
$$

Unindo estes fatos concluímos que

$$\frac{d}{dt}[(1+\delta)\log(\lambda_3-\lambda_1)-\log(\lambda_1+\lambda_2)] \leq (1+\delta)(\lambda_3-\lambda_3)=0.$$

Isto significa que a função $t \mapsto \log\left(\frac{(\lambda_3-\lambda_1)^{1-\delta}}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$ é monótona decrescente. Daí $t \mapsto \frac{(\lambda_3-\lambda_1)^{1-\delta}}{\lambda_1+\lambda_2}$ também é monótona decrescente. Portanto, se

$$\frac{(\lambda_3(0)-\lambda_1(0))^{1-\delta}}{\lambda_1(0)+\lambda_2(0)} \leq N,$$

temos que

$$\frac{(\lambda_3(t)-\lambda_1(t))^{1-\delta}}{\lambda_1(t)+\lambda_2(t)} \leq N,$$

para todo $t \in (0,T)$. Em outras palavras concluímos que a condição $(\lambda_3-\lambda_1)^{1+\delta} \leq N(\lambda_1+\lambda_2)$ é preservada pela E.D.O. de Hamilton.

□

Proposição 4.12. *Considere $K \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$ um subconjunto compacto. Assuma que todo tensor de curvatura algébrico $R \in K$ possua curvatura de Ricci positiva. Então, existe um conjunto pinçante $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$ tal que $K \subset F$.*

Demonstração. Inicialmente, observe que se $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$ e $\mathrm{Ric}(R) > 0$, temos, usando as notações anteriores,

$$\lambda_1+\lambda_2 = 2\mathrm{scal}-2(\mu_1+\mu_2) = 2\mathrm{scal}-2(\mathrm{scal}-\mu_3) = 2\mu_3 > 0.$$

Desta forma

$$K \subset \left\{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3); \lambda_1+\lambda_2 > 0\right\}.$$

Pela compacidade de K, é possível encontrar constantes uniformes $\delta \in (0,1)$ e $N > 0$ tais que

$$K \subset \left\{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3); \lambda_1+\lambda_2 \geq 2\delta\lambda_3 \;\text{ e }\; (\lambda_3-\lambda_1)^{1+\delta} \leq N(\lambda_1+\lambda_2)\right\}$$

Considere o conjunto $F = \{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3); \lambda_1 + \lambda_2 \geq 2\delta\lambda_3 \text{ e } (\lambda_3 - \lambda_1)^{1+\delta} \leq N(\lambda_1 + \lambda_2)\}$. Provaremos que F é um conjunto pinçante e, assim, concluiremos a demonstração da Proposição.

Utilizando a Proposição 4.11, vemos que F é invariante pela E.D.O. de Hamilton. É um exercício simples verificar que F é um conjunto fechado e $O(3)$-invariante.

Usando o Lema 4.12, vemos que $R \overset{f}{\mapsto} \mathrm{scal} - (2\delta - 1)\lambda_3$ e $R \overset{g}{\mapsto} -(\lambda_3 - \lambda_1)^{1+\delta} + N\mathrm{scal} - N\lambda_3$ são funções côncavas. Observando que $\mathrm{scal} - (2\delta-1)\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\delta\lambda_3$ e $-(\lambda_3 - \lambda_1)^{1+\delta} + N\mathrm{scal} - N\lambda_3 = -(\lambda_3 - \lambda_1)^{1+\delta} + N(\lambda_1 + \lambda_2)$, temos que $F = f^{-1}([0, \infty)) \cap g^{-1}([0, \infty))$, donde F é um conjunto convexo.

Afirmamos que dado $\varepsilon \in (0, 1)$, existe um conjunto compacto $L \subset F$ tal que se $R \in F/L$ então R é ε-pinçado.

Para demonstrar isto, escolhemos $\rho > 1$ tal que $\rho^\delta > \frac{2N}{1-\varepsilon}$ e consideramos $L = \{R \in F; \lambda_3 - \lambda_1 \leq \rho\}$. Facilmente podemos ver que L é um conjunto compacto. Se $R \in F$, temos que

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \varepsilon\lambda_3 &= -(\lambda_3 - \lambda_1) + (1-\varepsilon)\lambda_3 \\ &\geq -\frac{N(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_1)^\delta} + (1-\varepsilon)\lambda_3. \end{aligned}$$

Se tomamos $R \in F/L$ temos que $\lambda_3 - \lambda_1 > \rho$, donde $-(\lambda_3 - \lambda_1)^{-\delta} > -\rho^{-\delta}$. Assim, lembrando que $(1-\varepsilon) > 2N\rho^{-\delta}$, temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \varepsilon\lambda_3 &\geq -N(\lambda_1 + \lambda_2)\rho^{-\delta} + (1-\varepsilon)\lambda_3 \\ &> -N(\lambda_1 + \lambda_2)\rho^{-\delta} + 2N\rho^{-\delta}\lambda_3 \\ &= N\rho^{-\delta}[(\lambda_3 - \lambda_1) + (\lambda_3 - \lambda_2)] \\ &> 0. \end{aligned}$$

Em outras palavras, provamos que se $R \in F/L$ então R é ε-pinçado.

Isto conclui a prova de que F é um conjunto pinçante.

$\square$

Teorema 4.3 (R. Hamilton, [17]). *Considere M uma 3-variedade riemanniana compacta e g_0 uma métrica riemanniana em M com curvatura de Ricci positiva. Considere ainda $g(t)$, $t \in [0, T)$, a única solução maximal do Fluxo de Ricci com métrica inicial g_0. Então, quando $t \to T$, as métricas rescalonadas $\frac{1}{4(T-t)}g(t)$ convergem em C^∞ para uma métrica de curvatura seccional constante igual a 1.*

Demonstração. Como M é uma variedade compacta, temos que o conjunto $K = \{R_{(p,0)}; p \in M\}$ é compacto. Pela Proposição 4.12 é possível encontrar um conjunto pinçante $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$ tal que $K \subset F$. Daí, a assertiva segue do Teorema 4.2.

$\square$

Corolário 4.4. *Considere* (M, g_0) *uma variedade Riemanniana compacta tridimensional com curvatura de Ricci positiva. Então* M *é difeomorfa a uma forma espacial esférica* $\mathbb{S}^3/\Gamma$*. Em particular, se* M *é simplesmente conexa então* M *é difeomorfa a* $\mathbb{S}^3$*.*

Demonstração. Segue do Teorema 4.3 que M admite uma métrica de curvatura seccional constante igual a 1. Segue da classificação das formas espaciais conexas que M é difeomorfa a $\mathbb{S}^3/\Gamma$, onde Γ é uma ação, livre de pontos fixos, de um subgrupo finito $\Gamma \subset O(4)$.

$\square$

Capítulo 5

Condições de Curvatura preservadas em dimensões maiores

Neste capítulo abordaremos acerca de uma condição de curvatura que é preservada pelo fluxo de Ricci em todas dimensões: a curvatura isotrópica não negativa.

Na primeira seção, introduziremos a noção de curvatura isotrópica não negativa e, a partir de noções de álgebra linear complexa, caracterizaremos este conceito. Na segunda seção, a partir de uma série de cálculos, apresentaremos um importante teorema que assegura que a curvatura isotrópica não negativa é preservada pelo fluxo de Ricci em todas dimensões. Após isto isto, abordaremos uma crucial construção de S. Brendle e R. Schöen: o cone $\hat{C}$.

5.1 Curvatura isotrópica não negativa

No artigo [24], Micallef e Moore introduziram o conceito de curvatura isotrópica não negativa em conexão com o estudo do índice de Morse de 2-esferas mínimas. O principal resultado deste artigo afirma que toda variedade riemanniana compacta, simplesmente conexa, com curvatura isotrópica positiva é homeomorfa à esfera. Este resultado estende o Teorema da Esfera de Berger e Kligenberg. No seguimento desta seção, abordaremos o conceito de curvatura isotrópica não negativa bem como uma caracaterização que utiliza alguns conceitos de álgebra linear complexa (cf. Seção 1.4).

A partir de agora, assumiremos que V é um espaço vetorial de dimensão $n \geq 4$ munido de um produto interno $g(\cdot,\cdot)$.

Definição 5.1. *Um tensor de curvatura algébrico $R \in \mathscr{C}_B(V)$ é dito ter Curvatura Isotrópica não negativa se*

$$R(e_1,e_3,e_1,e_3) + R(e_1,e_4,e_1,e_4) + R(e_2,e_3,e_2,e_3)$$
$$+R(e_2,e_4,e_2,e_4) - 2R(e_1,e_2,e_3,e_4) \geq 0,$$

para todos conjuntos ortonormais $\{e_1,e_2,e_3,e_4\} \subset V$. Se a desigualdade acima é estrita para todos conjuntos ortonormais $\{e_1,e_2,e_3,e_4\} \subset V$, diremos que R tem Curvatura Isotrópica positiva.

A partir de agora, daremos uma caracterização alternativa da Curvatura Isotrópica não negativa. Para fazer isto, consideraremos $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a complexificação de V e estenderemos $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ à forma bilinear complexa $g_{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $g_{\mathbb{C}}(a + ib, c + id) = [g(a, c) - g(b, d)] + i[g(a, d) + g(b, c)]$, para todos $a, b, c, d \in V$. Por fim, estenda $R \in \mathscr{C}_B(V)$ à forma quadrilinear complexa $R_{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$. Para enxugar as notações, consideraremos $g_{\mathbb{C}} = g$ e $R_{\mathbb{C}} = R$.

Proposição 5.1 (M. Micallef, J. D. Moore, [24]). *Considere $R \in \mathscr{C}_B(V)$ um tensor de curvatura algébrica em V. São equaivalentes*

(i) *R tem Curvatura Isotrópica não negativa;*

(ii) *$R(\zeta, \eta, \bar{\zeta}, \bar{\eta}) \geq 0$, para todos vetores $\zeta, \eta \in V^{\mathbb{C}}$ tais que $g(\zeta, \zeta) = g(\eta, \eta) = g(\zeta, \eta) = 0$.*

Demonstração. **(i) $\Longrightarrow$ (ii)**. Considere $\zeta, \eta \in V^{\mathbb{C}}$ dois vetores $L.I.$ tais que $g(\zeta, \zeta) = g(\eta, \eta) = g(\zeta, \eta) = 0$. Seja $\sigma \subset V^{\mathbb{C}}$ o plano gerado por ζ e η. Segue do Corolário 1.3, que existe um conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ tal que $Z = e_1 + ie_2 \in \sigma$ e $W = e_3 + ie_4 \in \sigma$. Como Z e W são L.I., podemos encontrar $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tais que $\zeta = aZ + bW$ e $\eta = cZ + dW$. Assim

$$\begin{aligned} R(\zeta, \eta, \bar{\zeta}, \bar{\eta}) &= R(aZ + bW, cZ + dW, \overline{aZ + bW}, \overline{cZ + dW}) \\ &= (ad - bc)(\overline{ad - bc})R(Z, W, \bar{Z}, \bar{W}) \\ &= |ad - bc|^2 R(Z, W, \bar{Z}, \bar{W}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Por outro lado, usando que R tem Curvatura Isotrópica não negativa, temos

$$\begin{aligned} R(Z, W, \bar{Z}, \bar{W}) &= R(e_1 + ie_2, e_3 + ie_4, e_1 - ie_2, e_3 - ie_4) \\ &= R_{1213} - iR_{1314} - iR_{1323} - R_{1324} + iR_{1413} + R_{1414} \\ &\quad + R_{1423} - iR_{1424} + iR_{2313} + R_{2314} + R_{2323} \\ &\quad - iR_{2324} - R_{2413} + iR_{2414} + iR_{2423} + R_{2424} \\ &= R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} + 2R_{3124} + 2R_{2314} \\ &= R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234} \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Na penúltima igualdade utilizamos a 1^a Identidade de Bianchi. Substituindo (5.2) em (5.1), concluímos que

$$R(\zeta, \eta, \bar{\zeta}, \bar{\eta}) \geq 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Considere $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ como sendo um conjunto ortonormal em V. Definindo $\zeta = e_1 + ie_2$ e $\eta = e_3 + ie_4$, vemos facilmente que $g(\zeta, \zeta) = g(\eta, \eta) = g(\zeta, \eta) = 0$. Utilizando a hipótese **(ii)** e procendendo identicamente à demonstração anterior, temos que

$$
\begin{aligned}
0 \leq R(\zeta,\eta,\bar{\zeta},\bar{\eta}) &= R(e_1+ie_2,e_3+ie_4,e_1-ie_2,e_3-ie_4)\\
&= R_{1313}+R_{1414}+R_{2323}+R_{2424}-2R_{1234}.
\end{aligned}
$$

Como a base ortonormal $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ foi tomada arbitrariamente, segue que R tem Curvatura Isotrópica não negativa.

□

5.2 A invariância da Curvatura Isotrópica não negativa pelo Fluxo de Ricci

A partir de agora, vamos nos concentrar em demonstrar que a Curvatura isotrópica não negativa é preservada pelo Fluxo de Ricci. A série de lemas que demonstraremos a seguir servirá para demonstrar um resultado algébrico crucial para desenvolvimentos posteriores.

Consideremos V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 4$ munido de um produto interno $g(\cdot,\cdot)$, $R \in \mathscr{C}_B(V)$ um tensor de curvatura algébrico em V com curvatura isotrópica não negativa e $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ um conjunto ortonormal em V satisfazendo

$$
R(e_1,e_3,e_1,e_3)+R(e_1,e_4,e_1,e_4)+R(e_2,e_3,e_2,e_3)+R(e_2,e_4,e_2,e_4)-2R(e_1,e_2,e_3,e_4)=0.
$$

Será conveniente estender o conjunto ortonormal $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ a uma base ortonormal $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ de V.

Lema 5.1. *Temos que*

$$
R_{1213}+R_{1242}+R_{3413}+R_{3442}=R_{1214}+R_{1223}+R_{3414}+R_{3423}=0
$$

Demonstração. Considere $B=\{e_1,\cos(s)e_2-\operatorname{sen}(s)e_3,\operatorname{sen}(s)e_2+\cos(s)e_3,e_4\}$, onde $s\in\mathbb{R}$. Note que B é ortonormal para todo $s\in\mathbb{R}$. Como R tem curvatura isotrópica não negativa, temos

$$
\begin{aligned}
0 \leq\ & R(e_1,\operatorname{sen}(s)e_2+\cos(s)e_3,e_1,\operatorname{sen}(s)e_2+\cos(s)e_3)+R(e_1,e_4,e_1,e_4)\\
&+R(\cos(s)e_2-\operatorname{sen}(s)e_3,\operatorname{sen}(s)e_2+\cos(s)e_3,\cos(s)e_2-\operatorname{sen}(s)e_3,\operatorname{sen}(s)e_2+\cos(s)e_3)\\
&R(\cos(s)e_2-\operatorname{sen}(s)e_3,e_4,\cos(s)e_2-\operatorname{sen}(s)e_3,e_4)\\
&+R(e_1,\cos(s)e_2-\operatorname{sen}(s)e_3,\operatorname{sen}(s)e_2+\cos(s)e_3,e_4)\\
=\ & \operatorname{sen}^2(s)R_{1212}+\operatorname{sen}(s)\cos(s)R_{1213}+\operatorname{sen}(s)\cos(s)R_{1312}+\cos^2(s)R_{1313}+R_{1414}+\\
&\operatorname{sen}(s)^2\cos^2(s)R_{2332}+\cos^4(s)R_{2323}-\operatorname{sen}^2(s)\cos^2(s)R_{3223}+\operatorname{sen}^4(s)R_{3232}\\
&+\cos^2 R_{2424}-\operatorname{sen}(s)\cos(s)R_{2434}+\operatorname{sen}^2(s)R_{3434}+\operatorname{sen}(s)\cos(s)R_{1224}\\
&-\operatorname{sen}(s)\cos(s)R_{1334}-\operatorname{sen}^2(s)R_{1324}+\cos^2(s)R_{1234}\\
=\ & \cos^2(s)(R_{1313}+R_{2424}-2R_{1234})+\operatorname{sen}^2(s)(R_{1212}+R_{3434}+2R_{1324})+R_{1414}\\
&+R_{2323}+2\operatorname{sen}(s)\cos(s)(R_{1213}-R_{2434}-R_{1224}+R_{1334}).
\end{aligned}
$$

Assim, a função

$$\begin{aligned} s \ \overset{\varphi}{\mapsto}\ & \cos^2(s)(R_{1313}+R_{2424}-2R_{1234})+\operatorname{sen}^2(s)(R_{1212}+R_{3434}+2R_{1324})+R_{1414} \\ & +R_{2323}+2\operatorname{sen}(s)\cos(s)(R_{1213}-R_{2434}-R_{1224}+R_{1334}) \end{aligned}$$

é não negativa, para todo $s \in \mathbb{R}$, e anula-se em $s=0$. Portanto $s=0$ é um ponto crítico de φ, de onde

$$R_{1213}-R_{2434}-R_{1224}+R_{1334}=\frac{d}{ds}\Big|_{s=o}\varphi(s)=0.$$

Pelas propriedades de simetria do tensor curvatura algébrica concluiremos que

$$R_{1213}+R_{1242}+R_{3413}+R_{3442}=0.$$

Substituindo o conjunto $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ pelo conjunto $\{e_2,-e_1,e_3,e_4\}$ e raciocinando da mesma forma que anteriormente, concluimos que $-R_{1223}+R_{1434}+R_{2114}+R_{2334}=0$, de onde

$$R_{1214}+R_{1223}+R_{3414}+R_{3423}=0.$$

□

Lema 5.2. *Temos que*

$$\begin{aligned} & \sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p1q}+R_{2p2q})(R_{3p3q}+R_{4p4q})-\sum_{p,q=1}^{4}R_{12pq}R_{34pq} \\ = & \sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p3q}+R_{2p4q})(R_{3p1q}+R_{4p2q})+\sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p4q}-R_{2p3q})(R_{4p1q}-R_{3p2q}) \end{aligned}$$

Demonstração.
Um cálculo direto nos mostrará que

$$\begin{aligned} & \sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p1q}+R_{2p2q})(R_{3p3q}+R_{4p4q})-\sum_{p,q=1}^{4}R_{12pq}R_{34pq} \\ & -\sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p3q}+R_{2p4q})(R_{3p1q}+R_{4p2q})-\sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p4q}-R_{2p3q})(R_{4p1q}-R_{3p2q}) \\ = & \ (R_{1212}+R_{3434})(R_{1313}+R_{1414}+R_{2323}+R_{2424}-2R_{1234}) \\ & +2R_{1234}(R_{1313}+R_{1414}+R_{2323}+R_{2424}+2R_{1342}+2R_{1432}) \\ & -(R_{1213}+R_{1242}+R_{3413}+R_{3442})^2-(R_{1214}+R_{1223}+R_{3414}+R_{3423})^2 \\ = & \ (R_{1212}+R_{3434}+2R_{1234})(R_{1313}+R_{1414}+R_{2323}+R_{2424}-2R_{1234}) \\ & -(R_{1213}+R_{1242}+R_{3413}+R_{3442})^2-(R_{1214}+R_{1223}+R_{3414}+R_{3423})^2. \end{aligned}$$

Na última igualdade utilizamos que $R_{1342} + R_{1423} = -R_{1234}$ pela 1^a Identidade de Bianchi. Segue da nossa condição de que $R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234} = 0$ e do Lema 5.1 que o lado direito da igualdade se anula, de onde concluímos nossa assertiva.

□

Lema 5.3. *Temos que*

$$R_{133q} + R_{144q} + R_{432q} = R_{233q} + R_{244q} + R_{341q} = 0,$$

para todo $q = 5, \ldots, n$.

Demonstração. Considere o conjunto ortonormal $\{\cos(s)e_1 + \mathrm{sen}(s)e_q, e_2, e_3, e_4\}$, onde $s \in \mathbb{R}$ e $q = 5, \ldots, n$. Como R tem curvatura isotrópica não negativa, segue que

$$\begin{aligned}
0 \quad &\leq \quad R(\cos(s)e_1 + \mathrm{sen}(s)e_q, e_3, \cos(s)e_1 + \mathrm{sen}(s)e_q, e_3) \\
&\quad\quad +R(\cos(s)e_1 + \mathrm{sen}(s)e_q, e_4, \cos(s)e_1 + \mathrm{sen}(s)e_q, e_4) \\
&\quad\quad +R(e_2, e_3, e_2, e_3) + R(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&\quad\quad +R(\cos(s)e_1 + \mathrm{sen}(s)e_q, e_2, e_3, e_4) \\
&= \quad \cos^2(s)(R_{1313} + R_{1414}) + \mathrm{sen}^2(s)(R_{q3q3} + R_{q4q4}) + R_{2323} + R_{2424} \\
&\quad\quad +2\mathrm{sen}(s)\cos(s)(R_{13q3} + R_{14q4}) - 2\cos(s)R_{1234} - 2\mathrm{sen}(s)R_{q234}.
\end{aligned}$$

Desta forma, a função

$$\begin{aligned}
s \quad \overset{\psi}{\mapsto} \quad & \cos^2(s)(R_{1313} + R_{1414}) + \mathrm{sen}^2(s)(R_{q3q3} + R_{q4q4}) + R_{2323} + R_{2424} \\
& +2\mathrm{sen}(s)\cos(s)(R_{13q3} + R_{14q4}) - 2\cos(s)R_{1234} - 2\mathrm{sen}(s)R_{q234}
\end{aligned}$$

é não negativa, para todo $s \in \mathbb{R}$, e anula-se em $s = 0$. Portanto $s = 0$ é um ponto crítico de ψ, de onde

$$2R_{13q3} + 2R_{14q4} - 2R_{q234} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=o}\psi(s) = 0.$$

Daí, concluímos que

$$R_{13q3} + R_{14q4} + R_{432q} = 0.$$

Substituindo o conjunto $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ pelo conjunto $\{e_2, -e_1, e_3, e_4\}$ e raciocinando da mesma forma que anteriormente, vamos obter que $R_{233q} + R_{24q4} + R_{q134} = 0$, de onde

$$R_{233q} + R_{244q} + R_{341q} = 0$$

□

Lema 5.4. *Temos que*

$$\sum_{p=1}^{4}(R_{1p1q}+R_{2p2q})(R_{3p3q}+R_{4p4q})-\sum_{p=1}^{4}R_{12pq}R_{34pq}$$
$$=\sum_{p=1}^{4}(R_{1p3q}+R_{2p4q})(R_{3p1q}+R_{4p2q})+\sum_{p=1}^{4}(R_{1p4q}-R_{2p3q})(R_{4p1q}-R_{3p2q}),$$

para todo $q=5,\ldots,n$.

Demonstração.
Utilizando o Lema 5.3, temos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{2}(R_{1p1q}+R_{2p2q})(R_{3p3q}+R_{4p4q})-\sum_{p=1}^{2}R_{12pq}R_{34pq}\\
=\ & R_{212q}(R_{313q}+R_{414q})+R_{121q}(R_{323q}+R_{424q})-R_{121q}R_{341q}-R_{122q}R_{342q}\\
=\ & R_{122q}(R_{133q}+R_{144q}+R_{432q})+R_{211q}(R_{233q}+R_{244q}+R_{341q})\\
=\ & 0.
\end{aligned}$$

Também temos, pelo Lema 5.3 e pela 1^a Identidade de Bianchi, que

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=3}^{4}(R_{1p3q}+R_{2p4q})(R_{3p1q}+R_{4p2q})+\sum_{p=3}^{4}(R_{1p4q}-R_{2p3q})(R_{4p1q}-R_{3p2q})\\
=\ & (R_{133q}+R_{234q})R_{432q}+(R_{143q}+R_{244q})R_{341q}\\
& +(R_{134q}-R_{233q})R_{431q}-(R_{144q}-R_{243q})R_{342q}\\
=\ & R_{432q}(R_{133q}+R_{234q}-R_{243q}+R_{144q})+R_{341q}(R_{143q}+R_{244q}-R_{134q}+R_{233q})\\
=\ & R_{432q}(R_{133q}+R_{432q}+R_{144q})+R_{341q}(R_{244q}+R_{341q}+R_{233q})\\
=\ & 0.
\end{aligned}$$

Substituindo o conjunto $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ pelo conjunto $\{e_3,e_4,e_1,e_2\}$ e raciocinando da mesma forma que anteriormente, vamos obter que

$$\sum_{p=3}^{4}(R_{1p1q}+R_{2p2q})(R_{3p3q}+R_{4p4q})-\sum_{p=3}^{4}R_{12pq}R_{34pq}=0$$

e

$$\sum_{p=1}^{2}(R_{1p3q}+R_{2p4q})(R_{3p1q}+R_{4p2q})+\sum_{p=1}^{2}(R_{1p4q}-R_{2p3q})(R_{4p1q}-R_{3p2q})=0$$

Unindo os fatos supracitados, a nossa assertiva segue.

$\square$

Lema 5.5. *Sejam $w_1, w_2, w_3, w_4 \in span\{e_5, \ldots, e_n\}$. Então a expressão*

$$\begin{aligned}
&R(w_1,e_3,w_1,e_3) + R(w_1,e_4,w_1,e_4) + R(w_2,e_3,w_2,e_3) + R(w_2,e_4,w_2,e_4)\\
&+R(e_1,w_3,e_1,w_3) + R(e_2,w_3,e_2,w_3) + R(e_1,w_4,e_1,w_4) + R(e_2,w_4,e_2,w_4)\\
&-2[R(e_3,w_1,e_1,w_3) + R(e_4,w_1,e_2,w_3)] - 2[R(e_4,w_1,e_1,w_4) - R(e_3,w_1,e_2,w_4)]\\
&+2[R(e_4,w_2,e_1,w_3) - R(e_3,w_2,e_2,w_3)] - 2[R(e_3,w_2,e_1,w_4) + R(e_4,w_2,e_2,w_4)]\\
&-2R(w_1,w_2,e_3,e_4) - 2R(e_1,e_2,w_3,w_4)
\end{aligned}$$

é não negativa.

Demonstração. Fixado $i \in \{1,2,3,4\}$, considere $v_i(s)$ a única solução da E.D.O. linear

$$v_i'(s) = \sum_{j=1}^{4}[\langle v_i(s), e_j\rangle w_j - \langle v_i(s), w_j\rangle e_j],$$

com condição inicial $v_i(0) = e_i$. Claramente temos que $v_i'(0) = w_i$. Além disso,

$$\begin{aligned}
v_i''(0) &= \sum_{j=1}^{4}[\langle v_i'(0), e_j\rangle w_j - \langle v_i'(0), w_j\rangle e_j]\\
&= \sum_{j=1}^{4}[\langle w_i, e_j\rangle w_j - \langle w_i, w_j\rangle e_j]\\
&= -\sum_{j=1}^{4}\langle w_i, w_j\rangle e_j.
\end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\langle v_i(s), v_j(s)\rangle &= \Big\langle \sum_{l=1}^{4}[\langle v_i(s), e_l\rangle w_l - \langle v_i(s), w_l\rangle e_l], v_j(s)\Big\rangle\\
&\quad+\Big\langle v_i(s), \sum_{l=1}^{4}[\langle v_j(s), e_l\rangle w_l - \langle v_j(s), w_l\rangle e_l]\Big\rangle\\
&= \sum_{l=1}^{4}\langle v_i(s), e_l\rangle\langle w_l, v_j(s)\rangle - \sum_{l=1}^{4}\langle v_i(s), w_l\rangle\langle e_l, v_j(s)\rangle\\
&\quad+\sum_{l=1}^{4}\langle v_j(s), e_l\rangle\langle w_l, v_i(s)\rangle - \sum_{l=1}^{4}\langle v_j(s), w_l\rangle\langle v_i(s), e_l\rangle\\
&= 0,
\end{aligned}$$

temos

$$\langle v_i(s), v_j(s)\rangle = \langle v_i(0), v_j(0)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij},$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Com isto, para cada $s \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{v_1(s), v_2(s), v_3(s), v_4(s)\}$ é ortonormal. Como R tem curvatura isotrópica não negativa, a função

$$\begin{aligned} s \quad \overset{f}{\mapsto} \quad & \frac{1}{2}R(v_1(s), v_3(s), v_1(s), v_3(s)) + \frac{1}{2}R(v_1(s), v_4(s), v_1(s), v_4(s)) \\ & + \frac{1}{2}R(v_2(s), v_3(s), v_2(s), v_3(s)) + \frac{1}{2}R(v_2(s), v_4(s), v_2(s), v_4(s)) \\ & - R(v_1(s), v_2(s), v_3(s), v_4(s)) \end{aligned}$$

é não negativa para todo $s \in \mathbb{R}$. Visto que $v_i(0) = e_i$, temos que $s = 0$ é um ponto de mínimo de f. Desta forma, a segunda derivada de f em $s = 0$ é não negativa. Podemos calcular que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} R(v_1'(s), v_2(s), v_3(s), v_4(s)) \quad = \quad & -|w_1|^2 R(e_1, e_2, e_3, e_4) - \langle w_1, w_3\rangle R(e_3, e_2, e_3, e_4) \\ & - \langle w_1, w_4\rangle R(e_4, e_2, e_3, e_4) + R(w_1, w_2, e_3, e_4) \\ & + R(w_1, e_2, w_3, e_4) + +R(w_1, e_2, w_3, e_4). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I^{(1)} \quad = \quad & \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} R(v_1(s), v_3(s), v_1(s), v_3(s)) \\ = \quad & -(|w_1|^2 + |w_3|^2)R(e_1, e_3, e_1, e_3) - \langle w_1, w_2\rangle R(e_1, e_3, e_2, e_3) \\ & - \langle w_1, w_4\rangle R(e_1, e_3, e_4, e_3) - \langle w_3, w_2\rangle R(e_1, e_3, e_1, e_2) \\ & - \langle w_3, w_4\rangle R(e_1, e_3, e_1, e_4) + R(w_1, e_3, w_1, e_3) + R(e_1, w_3, e_1, w_3) \\ & + 2R(e_1, e_3, w_1, w_3) + 2R(e_1, w_3, w_1, e_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I^{(2)} \quad = \quad & \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} R(v_1(s), v_4(s), v_1(s), v_4(s)) \\ = \quad & -(|w_1|^2 + |w_4|^2)R(e_1, e_4, e_1, e_4) - \langle w_1, w_2\rangle R(e_1, e_4, e_2, e_4) \\ & - \langle w_1, w_3\rangle R(e_1, e_4, e_3, e_4) - \langle w_4, w_2\rangle R(e_1, e_4, e_1, e_2) \\ & - \langle w_4, w_3\rangle R(e_1, e_4, e_1, e_3) + R(w_1, e_4, w_1, e_4) + R(e_1, w_4, e_1, w_4) \\ & + 2R(e_1, e_4, w_1, w_4) + 2R(e_1, w_4, w_1, e_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^{(3)} &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} R(v_2(s), v_3(s), v_2(s), v_3(s)) \\
&= -(|w_2|^2 + |w_3|^2)R(e_2, e_3, e_2, e_3) - \langle w_2, w_1\rangle R(e_2, e_3, e_1, e_3) \\
&\quad -\langle w_2, w_4\rangle R(e_2, e_3, e_4, e_3) - \langle w_3, w_1\rangle R(e_2, e_3, e_2, e_1) \\
&\quad -\langle w_3, w_4\rangle R(e_2, e_3, e_2, e_4) + R(w_2, e_3, w_2, e_3) + R(e_2, w_3, e_2, w_3) \\
&\quad +2R(e_2, e_3, w_2, w_3) + 2R(e_2, w_3, w_2, e_3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^{(4)} &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} R(v_2(s), v_4(s), v_2(s), v_4(s)) \\
&= -(|w_2|^2 + |w_4|^2)R(e_2, e_4, e_2, e_4) - \langle w_2, w_1\rangle R(e_2, e_4, e_1, e_4) \\
&\quad -\langle w_2, w_3\rangle R(e_2, e_4, e_3, e_4) - \langle w_4, w_1\rangle R(e_2, e_4, e_2, e_1) \\
&\quad -\langle w_4, w_3\rangle R(e_2, e_4, e_2, e_3) + R(w_2, e_4, w_2, e_4) + R(e_2, w_4, e_2, w_4) \\
&\quad +2R(e_2, e_4, w_2, w_4) + 2R(e_2, w_4, w_2, e_4)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I^{(5)} &= \frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} R(v_1(s), v_2(s), v_3(s), v_4(s)) \\
&= -(|w_1|^2 + |w_2|^2 + |w_3|^2 + |w_4|^2)R(e_1, e_2, e_3, e_4) \\
&\quad -\langle w_1, w_3\rangle R(e_3, e_2, e_3, e_4) - \langle w_1, w_4\rangle R(e_4, e_2, e_3, e_4) \\
&\quad -\langle w_2, w_3\rangle R(e_1, e_3, e_3, e_4) - \langle w_2, w_4\rangle R(e_1, e_4, e_3, e_4) \\
&\quad -\langle w_3, w_1\rangle R(e_1, e_2, e_1, e_4) - \langle w_3, w_2\rangle R(e_1, e_2, e_2, e_4) \\
&\quad -\langle w_4, w_1\rangle R(e_1, e_2, e_3, e_1) - \langle w_4, w_2\rangle R(e_1, e_2, e_3, e_2) \\
&\quad +2R(w_1, w_2, e_3, e_4) + 2R(w_1, e_2, w_3, e_4) + 2R(w_1, e_2, e_3, w_4) \\
&\quad +2R(e_1, w_2, w_3, e_4) + 2R(e_1, w_2, e_3, w_4) + 2R(e_1, e_2, w_3, w_4).
\end{aligned}$$

Lembrando que a segunda derivada de f em $s = 0$ é não negativa temos que

$$0 \leq I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)} + I^{(4)} - I^{(5)}.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
0 \leq\ & R(w_1,e_3,w_1,e_3)+R(w_1,e_4,w_1,e_4)+R(w_2,e_3,w_2,e_3)\\
&+R(w_2,e_4,w_2,e_4)+R(e_1,w_3,e_1,w_3)+R(e_2,w_3,e_2,w_3)\\
&+R(e_1,w_4,e_1,w_4)+R(e_2,w_4,e_2,w_4)+2R(e_1,e_3,w_1,w_3)\\
&+2R(e_1,w_3,w_1,e_3)-2R(w_1,e_2,w_3,e_4)+2R(e_1,e_4,w_1,w_4)\\
&+2R(e_1,w_4,w_1,e_4)-2R(w_1,e_2,e_3,w_4)+2R(e_2,e_3,w_2,w_3)\\
&+2R(e_2,w_3,w_2,e_3)-2R(e_1,w_2,w_3,e_4)+2R(e_2,e_4,w_2,w_4)\\
&+2R(e_2,w_4,w_2,e_4)-2R(e_1,w_2,e_3,w_4)-2R(w_1,w_2,e_3,e_4)\\
&-2R(e_1,e_2,w_3,w_4)\\
&-|w_1|^2(R_{1313}+R_{1414}-R_{1234})-|w_2|^2(R_{2323}+R_{2424}-R_{1234})\\
&-|w_3|^2(R_{1313}+R_{2323}-R_{1234})-|w_4|^2(R_{1414}+R_{2424}-R_{1234})\\
&+(\langle w_1,w_3\rangle-\langle w_2,w_4\rangle)(R_{1214}-R_{1232}+R_{3234}-R_{1434})\\
&-(\langle w_1,w_4\rangle+\langle w_2,w_3\rangle)(R_{1213}+R_{1242}+R_{3134}+R_{2434})\\
&-2\langle w_1,w_2\rangle(R_{1323}+R_{1424})-2\langle w_3,w_4\rangle(R_{1314}+R_{2324})
\end{aligned}
$$

Substituindo o conjunto $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ pelo conjunto $\{e_2,-e_1,e_4,-e_3\}$ e raciocinando da mesma forma que anteriormente, temos

$$
\begin{aligned}
0 \leq\ & R(w_1,e_4,w_1,e_4)+R(w_1,e_3,w_1,e_3)+R(w_2,e_4,w_2,e_4)\\
&+R(w_2,e_3,w_2,e_3)+R(e_2,w_3,e_2,w_3)+R(e_1,w_3,e_1,w_3)\\
&+R(e_2,w_4,e_2,w_4)+R(e_1,w_4,e_1,w_4)+2R(e_2,e_4,w_1,w_3)\\
&+2R(e_2,w_3,w_1,e_4)-2R(w_1,e_1,w_3,e_3)-2R(e_2,e_3,w_1,w_4)\\
&-2R(e_2,w_4,w_1,e_3)+2R(w_1,e_1,e_4,w_4)-2R(e_1,e_4,w_2,w_3)\\
&-2R(e_1,w_3,w_2,e_4)+2R(e_2,w_2,w_3,e_3)+2R(e_1,e_3,w_2,w_4)\\
&-2R(e_1,w_4,w_2,e_3)-2R(e_2,w_2,e_4,w_4)+2R(w_1,w_2,e_4,e_3)\\
&+2R(e_2,e_1,w_3,w_4)\\
&-|w_1|^2(R_{2424}+R_{2323}-R_{2143})-|w_2|^2(R_{1414}+R_{1313}-R_{2143})\\
&-|w_3|^2(R_{2424}+R_{1414}-R_{2143})-|w_4|^2(R_{2323}+R_{1313}-R_{2143})\\
&+(\langle w_1,w_3\rangle-\langle w_2,w_4\rangle)(R_{2123}-R_{2141}+R_{4143}-R_{2343})\\
&+(\langle w_1,w_4\rangle+\langle w_2,w_3\rangle)(R_{2124}+R_{2131}+R_{4243}+R_{1343})\\
&+2\langle w_1,w_2\rangle(R_{2414}+R_{2313})+2\langle w_3,w_4\rangle(R_{2423}+R_{1413}).
\end{aligned}
$$

Lembrando que $R_{1313}+R_{1414}+R_{2323}+R_{2424}-2R_{1234}=0$, somamos as últimas desigualdades e dividimos por 2 para obter que

$$
\begin{aligned}
0 \quad \leq \quad & R(w_1, e_3, w_1, e_3) + R(w_1, e_4, w_1, e_4) + R(w_2, e_3, w_2, e_3) \\
& + R(w_2, e_4, w_2, e_4) + R(e_1, w_3, e_1, w_3) + R(e_2, w_3, e_2, w_3) \\
& + R(e_1, w_4, e_1, w_4) + R(e_2, w_4, e_2, w_4) \\
& + [R(e_1, e_3, w_1, w_3) + R(e_1, w_3, w_1, e_3) - R(w_1, e_2, w_3, e_4) \\
& + R(e_2, e_4, w_1, w_3) + R(e_2, w_3, w_1, e_4) - R(w_1, e_1, w_3, e_3)] \\
& + [R(e_1, e_4, w_1, w_4) + R(e_1, w_4, w_1, e_4) - R(w_1, e_2, e_3, w_4) \\
& - R(e_2, e_3, w_1, w_4) - R(e_2, w_4, w_1, e_3) + R(w_1, e_1, e_4, w_4)] \\
& + [R(e_2, e_3, w_2, w_3) + R(e_2, w_3, w_2, e_3) - R(e_1, w_2, w_3, e_4) \\
& - R(e_1, e_4, w_2, w_3) - R(e_1, w_3, w_2, e_4) + R(e_2, w_2, w_3, e_3)] \\
& + [R(e_2, e_4, w_2, w_4) + R(e_2, w_4, w_2, e_4) - R(e_1, w_2, w_3, e_4) \\
& + R(e_1, e_3, w_2, w_4) + R(e_1, w_4, w_2, e_3) - R(e_2, w_2, e_4, w_4)] \\
& - 2R(w_1, w_2, e_3, e_4) - 2R(e_1, e_2, w_3, w_4). \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

Usando as relações de simetria de R e a 1^a Identidade de Bianchi, teremos, por exemplo, que

$$
\begin{aligned}
& + [R(e_1, e_3, w_1, w_3) + R(e_1, w_3, w_1, e_3) - R(w_1, e_1, w_3, e_3) \\
& - R(w_1, e_2, w_3, e_4) + R(e_2, e_4, w_1, w_3) + R(e_2, w_3, w_1, e_4)] \\
& [-R(e_3, w_1, e_1, w_3) + (R(e_1, e_3, w_1, w_3) + R(w_1, e_1, e_3, w_3)) \\
& - R(e_4, w_1, e_2, w_3) + (R(w_1, e_2, e_4, w_3) + R(e_4, w_1, e_2, w_3))] \\
= \quad & -2[R(e_3, w_1, e_1, w_3) + R(e_4, w_1, e_2, w_3)].
\end{aligned}
$$

Utilizando o mesmo raciocínio nos termos entre colchetes de (5.3), chegamos ao resultado desejado.

□

Lema 5.6. *Temos que*

$$
\begin{aligned}
& \sum_{p,q=5}^{n} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p,q=5}^{n} R_{12pq} R_{34pq} \\
\geq \quad & \sum_{p,q=5}^{n} (R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) + \sum_{p,q=5}^{n} (R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}).
\end{aligned}
$$

Demonstração. Denotemos por $W = \operatorname{span}\{e_5, \ldots, e_n\}$. Definamos transformações lineares $A, B, C, D, E, F : W \longrightarrow W$ por

$$\begin{aligned}\langle Ae_p, e_q\rangle &= R_{1p1q} + R_{2p2q}, & \langle Be_p, e_q\rangle &= R_{3p3q} + R_{4p4q}\\ \langle Ce_p, e_q\rangle &= R_{3p1q} + R_{4p2q}, & \langle De_p, e_q\rangle &= R_{4p1q} - R_{3p2q}\\ \langle Ee_p, e_q\rangle &= R_{12pq}, & \langle Fe_p, e_q\rangle &= R_{34pq},\end{aligned}$$

onde $p, q \in \{5, \ldots, n\}$. Segue das relações de simetria do tensor de curvatura que A e B são simétricas e E e F são anti-simétricas. Além disso, utilizando o Lema 5.5, veremos que

$$\begin{aligned}&\langle Bw_1, w_1\rangle + \langle Bw_2, w_2\rangle + \langle Aw_3, w_3\rangle + \langle Aw_4, w_4\rangle\\ &-2\langle Cw_1, w_3\rangle - 2\langle Dw_1, w_4\rangle + 2\langle Dw_2, w_3\rangle - 2\langle Cw_2, w_4\rangle\\ &-2\langle Fw_1, w_2\rangle - 2\langle Ew_3, w_4\rangle \geq 0,\end{aligned} \tag{5.4}$$

para todos vetores w_1, w_2, w_3, w_4 de W. Para exemplificar que (5.4) decorre do Lema 5.5, note que, se escrevermos $w_1 = a^i e_i$ e $w_3 = b^j e_j$, temos

$$\begin{aligned}-2\langle Cw_1, w_3\rangle &= -2\langle C(a^i e_i), b^j e_j\rangle\\ &= -2a^i b^j \langle Ce_i, e_j\rangle\\ &= -2a^i b^j (R_{3i1j} + R_{4i2j})\\ &= -2[R(e_3, w_1, e_1, w_3) + R(e_4, w_1, e_2, w_3)]\end{aligned}$$

Definamos transformações lineares $M, U : W \times W \times W \times W \longrightarrow W \times W \times W \times W$ por

$$M = \begin{bmatrix} B & F & C^* & -D^* \\ -F & B & D^* & -C^* \\ -C & D & A & E \\ -D & -C & -E & A \end{bmatrix}$$

e

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{id} \\ -\mathrm{id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Segue da simetria de A e B e da anti-simetria de E e F, que a transformação M é simétrica. Assim, usando a desigualdade (5.4), concluímos que M é positiva semi-definida. Um cálculo simples mostrará que

$$MUMU^* = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix},$$

onde cada B_{ij}, $1 \leq i,j \leq 4$, é um bloco 4×4 e, além disso, $B_{11} = B_{22} = -(C^*)^2 - (D^*)^2 + AB + EF$ e $B_{33} = B_{44} = -C^2 - D^2 + AB + EF$. Levando em conta que $\mathrm{tr}(T+V) = \mathrm{tr}(T) + \mathrm{tr}(V)$, $\mathrm{tr}(T^*) = \mathrm{tr}(T)$ e M é positiva semi-definida, concluiremos que

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{1}{4}\mathrm{tr}(MUMU^*) &= \mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(EF) - \mathrm{tr}(C^2) - \mathrm{tr}(D^2) \\
&= \sum_{p,q=5}^{n} \langle Ae_p, e_q\rangle\langle Be_q, e_p\rangle + \sum_{p,q=5}^{n} \langle Ee_p, e_q\rangle\langle Fe_q, e_p\rangle \\
&\quad - \sum_{p,q=5}^{n} \langle Ce_p, e_q\rangle\langle Ce_q, e_p\rangle - \sum_{p,q=5}^{n} \langle De_p, e_q\rangle\langle De_q, e_p\rangle \\
&= \sum_{p,q=5}^{n} \langle Ae_p, e_q\rangle\langle e_q, Be_p\rangle - \sum_{p,q=5}^{n} \langle Ee_p, e_q\rangle\langle e_q, Fe_p\rangle \\
&\quad - \sum_{p,q=5}^{n} \langle Ce_p, e_q\rangle\langle Ce_q, e_p\rangle - \sum_{p,q=5}^{n} \langle De_p, e_q\rangle\langle De_q, e_p\rangle \\
&= \sum_{p,q=5}^{n} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p,q=5}^{n} R_{12pq}R_{34pq} \\
&\quad - \sum_{p,q=5}^{n} (R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) \\
&\quad - \sum_{p,q=5}^{n} (R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}).
\end{aligned}$$

Isto finaliza nossa demonstração.

$\square$

A série de Lemas que demonstramos ao decorrer desta seção servirão para demontrar o crucial resultado algébrico que vem a seguir.

Proposição 5.2. *Considere $R \in \mathscr{C}_B(V)$ um tensor de curvatura algébrico em V com curvatura isotrópica não negativa. Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ um conjunto ortonormal em V satisfazendo*

$$R(e_1,e_3,e_1,e_3)+R(e_1,e_4,e_1,e_4)+R(e_2,e_3,e_2,e_3)+R(e_2,e_4,e_2,e_4)-2R(e_1,e_2,e_3,e_4) = 0.$$

Então

$$\begin{gathered}
R^{\#}(e_1,e_3,e_1,e_3) + R^{\#}(e_1,e_4,e_1,e_4) + R^{\#}(e_2,e_3,e_2,e_3) \\
+R^{\#}(e_2,e_4,e_2,e_4) + 2R^{\#}(e_1,e_3,e_4,e_2) + 2R^{\#}(e_1,e_4,e_2,e_3) \geq 0.
\end{gathered}$$

Demonstração.

Segue da definição de $R^{\#}$ que

$$\begin{aligned}
& (R^{\#})_{1313}+(R^{\#})_{1313}+(R^{\#})_{2323}+(R^{\#})_{2424} \\
& 2\sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p1q}R_{3p3q}+R_{1p1q}R_{4pqq}+R_{2p2q}R_{3p3q}+R_{2p2q}R_{4p4q}) \\
& -2\sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p3q}R_{3p1q}+R_{1p4q}R_{4p1q}+R_{2p3q}R_{3p2q}+R_{2p4q}R_{4p2q}) \\
= \ & 2\sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p1q}+R_{2p2q})(R_{3p3q}+R_{4p4q})-2\sum_{p,q=1}^{n}R_{1p3q}R_{3p1q} \\
& -2\sum_{p,q=1}^{n}R_{1p4q}R_{4p1q}-2\sum_{p,q=1}^{n}R_{2p3q}R_{3p2q}-2\sum_{p,q=1}^{n}R_{2p4q}R_{4p2q}. \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

Utilizando a 1^a Identidade de Bianchi e as simetrias do tensor curvatura, temos que

$$\begin{aligned}
& 2\sum_{p,q=1}^{n}R_{1p2q}R_{4p3q}-2\sum_{p,q=1}^{n}R_{1p2q}R_{3p4q} \\
= \ & -2\sum_{p,q=1}^{n}R_{1p2q}(R_{p43q}+R_{3p4q}) \\
= \ & -2\sum_{p,q=1}^{n}R_{1p2q}R_{43pq} \\
= \ & -\sum_{p,q=1}^{n}R_{1p2q}R_{34pq}-\sum_{q,p=1}^{n}R_{1q2p}R_{34qp} \\
= \ & -\sum_{p,q=1}^{n}R_{34qp}(R_{1p2q}+R_{1qp2})=-\sum_{p,q=1}^{n}R_{34qp}R_{12pq},
\end{aligned}$$

donde,

$$
\begin{aligned}
(R^{\#})_{1342} + (R^{\#})_{1423} &= 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p4q}R_{3p2q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p2q}R_{3p4q} \\
&\quad +2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p2q}R_{4p3q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p2q}R_{3p4q} \\
&= 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p4q}R_{3p2q} - \sum_{p,q=1}^{n} R_{12pq}R_{34pq} \\
&\quad -2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p2q}R_{3p4q}. \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

Somando as identidades (5.5) e (5.6), concluiremos que

$$
\begin{aligned}
& (R^{\#})_{1313} + (R^{\#})_{1414} + (R^{\#})_{2323} + (R^{\#})_{2424} + 2(R^{\#})_{1342} + 2(R^{\#})_{1423} \\
= \;& 2\sum_{p,q=1}^{n} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{12pq}R_{34pq} \\
& -2\sum_{p,q=1}^{n} (R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) - 2\sum_{p,q=1}^{n} (R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}).
\end{aligned}
$$

Segue dos Lemas 5.2, 5.4 e 5.6, que a expressão acima é não negativa. Disto, concluímos nossa proposição.

$\square$

Proposição 5.3. *Considere $R \in \mathscr{C}_B(V)$ um tensor de curvatura algébrico em V com curvatura isotrópica não negativa. Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ um conjunto ortonormal em V satisfazendo*

$$R(e_1, e_3, e_1, e_3) + R(e_1, e_4, e_1, e_4) + R(e_2, e_3, e_2, e_3) + R(e_2, e_4, e_2, e_4) - 2R(e_1, e_2, e_3, e_4) = 0.$$

Então

$$
\begin{gathered}
Q(R)(e_1, e_3, e_1, e_3) + Q(R)(e_1, e_4, e_1, e_4) + Q(R)(e_2, e_3, e_2, e_3) \\
Q(R)(e_2, e_4, e_2, e_4) - 2Q(R)(e_1, e_2, e_3, e_4) \geq 0
\end{gathered}
$$

Demonstração. Observe que

$$
\begin{aligned}
& R^2(e_1,e_3,e_1,e_3)+R^2(e_1,e_4,e_1,e_4)+R^2(e_2,e_3,e_2,e_3)\\
& +R^2(e_2,e_4,e_2,e_4)-2R^2(e_1,e_3,e_2,e_4)+2R^2(e_1,e_4,e_2,e_3)\\
= & \sum_{p,q=1}^{n}(R_{13pq})^2+\sum_{p,q=1}^{n}(R_{14pq})^2+\sum_{p,q=1}^{n}(R_{23pq})^2+\sum_{p,q=1}^{n}(R_{24pq})^2\\
& -2\sum_{p,q=1}^{n}R_{13pq}R_{24pq}++2\sum_{p,q=1}^{n}R_{14pq}R_{23pq}\\
= & \sum_{p,q=1}^{n}(R_{13pq}-R_{24pq})^2+\sum_{p,q=1}^{n}(R_{14pq}+R_{23pq})^2\\
\geq & \ 0.
\end{aligned}
$$

Usando a Proposição 5.2, a desigualdade acima e lembrando que $Q(R)=R^2+R^{\#}$ satisfaz a 1^a Identidade de Bianchi, teremos

$$
\begin{gathered}
Q(R)(e_1,e_3,e_1,e_3)+Q(R)(e_1,e_4,e_1,e_4)+Q(R)(e_2,e_3,e_2,e_3)\\
+Q(R)(e_2,e_4,e_2,e_4)+2Q(R)(e_1,e_3,e_4,e_2)+2Q(R)(e_1,e_4,e_2,e_3)\geq 0\\
\Longrightarrow Q(R)(e_1,e_3,e_1,e_3)+Q(R)(e_1,e_4,e_1,e_4)+Q(R)(e_2,e_3,e_2,e_3)\\
+Q(R)(e_2,e_4,e_2,e_4)-2Q(R)(e_1,e_2,e_3,e_4)\geq 0
\end{gathered}
$$

□

Proposição 5.4. *O cone*

$$C=\{R\in\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n);\, R \textit{ tem curvatura isotrópica não negativa}\}$$

é invariante pela E.D.O. de Hamilton $\frac{d}{dt}R=Q(R)$.

Demonstração.
Dado $\varepsilon>0$, considere $R_\varepsilon(t)$ a única solução da E.D.O $\frac{d}{dt}R_\varepsilon(t)=Q(R_\varepsilon(t))+I$, com condição inicial $R_\varepsilon(0)=R(0)+\varepsilon I$. Aqui, $I_{ijkl}=\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}$ representa o tensor curvatura da esfera canônica.

Suponha que $R_\varepsilon(t)$ está definido num intervalo $[0,T_\varepsilon)$. Afirmamos que $R_\varepsilon(t)$ possui curvatura isotrópica positiva para todo $t\in[0,T_\varepsilon)$. Argumentando por contradição, suporemos que existe $t\in[0,T_\varepsilon)$ que não possui curvatura isotrópica positiva. Considere

$$\tau:=\inf\{t\in[0,T_\varepsilon);R_\varepsilon(t)\ \text{ não possui curvatura isotrópica positiva}\}.$$

Pela definição de τ, existe um conjunto ortonormal $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ tal que

$$R_\varepsilon(\tau)_{1313}+R_\varepsilon(\tau)_{1414}+R_\varepsilon(\tau)_{2323}+R_\varepsilon(\tau)_{2424}-2R_\varepsilon(\tau)_{1234}=0.$$

Além disso,

$$R_\varepsilon(t)_{1313} + R_\varepsilon(t)_{1414} + R_\varepsilon(t)_{2323} + R_\varepsilon(t)_{2424} - 2R_\varepsilon(t)_{1234} > 0,$$

para todo $t \in [0, \tau)$. Desta forma

$$Q(R)_\varepsilon(\tau)_{1313}+Q(R)_\varepsilon(\tau)_{1414}+Q(R)_\varepsilon(\tau)_{2323}+Q(R)_\varepsilon(\tau)_{2424}-2Q(R)_\varepsilon(\tau)_{1234}+4\varepsilon \leq 0. \quad (5.7)$$

Como $R_\varepsilon(\tau)$ tem curvatura isotrópica não negativa, segue da Proposição 5.3 que

$$Q(R)_\varepsilon(\tau)_{1313} + Q(R)_\varepsilon(\tau)_{1414} + Q(R)_\varepsilon(\tau)_{2323} + Q(R)_\varepsilon(\tau)_{2424} - 2Q(R)_\varepsilon(\tau)_{1234} \geq 0,$$

o que contradiz (5.7). Portanto, $R_\varepsilon(t)$ possui curvatura isotrópica positiva para todo $t \in [0, T_\varepsilon)$.

Segue da teoria de E.D.O. que $T \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon$ e $R(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon(t)$, para todo $t \in [0, T)$. Consequentemente, $R(t)$ tem curvatura isotrópica não negativa para todo $t \in [0, T)$.

□

Teorema 5.1 (S. Brendle, R. Schöen, [7]; H. Nguyen, [26])**.** *Considere (M, g_0) uma variedade riemanniana compacta com curvatura isotrópica não negativa. Se $g(t)$, $t \in [0, T)$, é uma solução do Fluxo de Ricci em M com condição inicial $g(0) = g_0$, então $(M, g(t))$ tem curvatura isotrópica não negativa para todo $t \in [0, T)$.*

Demonstração. Facilmente podemos ver que o cone C definido na Proposição 5.4 é fechado, convexo e $O(n)$-invariante. Também foi demonstrado na Proposição 5.4 que C é invariante pela E.D.O. de Hamilton. Como $R_{g(0)} \in C$, segue do Teorema 4.1 que $R_{g(t)} \in C$ para todo $t \in [0, T)$, isto é, $(M, g(t))$ tem tem curvatura isotrópica não negativa para todo $t \in [0, T)$.

□

5.3 O Cone $\hat{C}$ de Brendle e Schoen

Consideremos V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 4$ munido de um produto interno $g(\cdot, \cdot)$. Seja $R \in \mathscr{C}_B(V)$. Definimos o tensor de curvatura algébrico $\hat{R} \in \mathscr{C}_B(V \times \mathbb{R}^2)$ por

$$\hat{R}(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{v}_4) := R(v_1, v_2, v_3, v_4),$$

onde $\hat{v}_j = (v_j, y_j)$, com $v_j \in V$ e $y_j \in \mathbb{R}^2$.

Definição 5.2. *Definimos o cone $\hat{C}$ como*

$$\hat{C} := \left\{ R \in \mathscr{C}_B(V); \hat{R} \textit{ tem curvatura isotrópica não negativa} \right\}$$

Facilmente pode-se ver que o cone $\hat{C}$ é um conjunto fechado, convexo e $O(n)$-invariante. No que segue esta seção caracterizaremos o cone $\hat{C}$.

Proposição 5.5. *Considere $R \in \mathscr{C}_B(V)$ e $\hat{R} \in \mathscr{C}_B(V \times \mathbb{R}^2)$, como definimos acima. As seguintes assertivas são equivalentes.*

(i) $R \in \hat{C}$;

(ii) *Temos que*

$$\begin{aligned}&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R(e_1, e_4, e_1, e_4)\\&+\mu^2 R(e_2, e_3, e_2, e_3) + \mu^2\lambda^2 R(e_2, e_4, e_2, e_4)\\&-2\lambda\mu R(e_1, e_2, e_3, e_4) \geq 0,\end{aligned}$$

para todos conjuntos ortonormais $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ e todos $\lambda, \mu \in [0, 1]$.

(iii) *Temos que $R(\zeta, \eta, \bar{\zeta}, \bar{\eta}) \geq 0$, para todos vetores $\zeta, \eta \in V^{\mathbb{C}}$.*

Demonstração.
(i) $\Longrightarrow$ (ii). Considerando um conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ e $\lambda, \mu \in [0, 1]$, definimos

$$\hat{e}_1 = (e_1, (0, 0)), \quad \hat{e}_2 = (\mu e_2, (0, \sqrt{1 - \mu^2})),$$

$$\hat{e}_3 = (e_3, (0, 0)), \quad \hat{e}_4 = (\lambda e_4, (\sqrt{1 - \lambda^2}, 0)).$$

Podemos ver que $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ é um conjunto ortonormal em $V \times \mathbb{R}^2$. Como $\hat{R}$ tem curvatura isotrópica não negativa segue que

$$\begin{aligned}&\hat{R}(\hat{e}_1, \hat{e}_3, \hat{e}_1, \hat{e}_3) + \hat{R}(\hat{e}_1, \hat{e}_4, \hat{e}_1, \hat{e}_4)\\&+\hat{R}(\hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_2, \hat{e}_3) + \hat{R}(\hat{e}_2, \hat{e}_4, \hat{e}_2, \hat{e}_4)\\&-2\hat{R}(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4) \geq 0.\end{aligned}$$

Substituindo nesta expressão os respectivos valores de $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ e $\hat{e}_4$ obtemos a assertiva **(ii)**.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Considere $\zeta, \eta \in V^{\mathbb{C}}$ dois vetores L.I. e seja $\sigma \subset V^{\mathbb{C}}$ o plano gerado por ζ e η. Pela Proposição 1.2, podemos encontrar um conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ e $\lambda, \mu \in [0, 1]$ tais que $Z = e_1 + i\mu e_2 \in \sigma$ e $W = e_3 + i\lambda e_4 \in \sigma$. Como Z e W são L.I., podemos encontrar números $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tais que $\zeta = aZ + bW$ e $\eta = cZ + dW$. Desta forma, temos que

$$R(\zeta, \eta, \bar{\zeta}, \bar{\eta}) = |ad - bc|^2 R(Z, W, \bar{Z}, \bar{W}). \tag{5.8}$$

Por outro lado, usando a hipótese **(ii)**, temos que

$$
\begin{aligned}
R(Z,W,\bar{Z},\bar{W}) &= R(e_1,e_3,e_1,e_3)+\lambda^2R(e_1,e_4,e_1,e_4)\\
&\quad +\mu^2R(e_2,e_3,e_2,e_3)+\mu^2\lambda^2R(e_2,e_4,e_2,e_4)\\
&\quad -2\lambda\mu R(e_1,e_2,e_3,e_4)\\
&\geq 0. \qquad (5.9)
\end{aligned}
$$

De (5.8) e (5.9) segue **(iii)**.

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)**. Considere $\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3,\hat{e}_4\}$ um conjunto ortonormal em $V\times\mathbb{R}^2$, onde $\hat{e}_j=(v_j,y_j)$, com $v_j\in V$ e $y_j\in\mathbb{R}^2$, para cada $j=1,2,3,4$. Se definirmos $\zeta=v_1+iv_2$ e $\eta=v_3+iv_4$, segue da hipótese **(iii)** e da definição de $\hat{R}$ que

$$
\begin{aligned}
0\leq R(\zeta,\eta,\bar{\zeta},\bar{\eta}) &= R(v_1,v_3,v_1,v_3)+R(v_1,v_4,v_1,v_4)\\
&\quad +R(v_2,v_3,v_2,v_3)+R(v_2,v_4,v_2,v_4)\\
&\quad -2R(v_1,v_2,v_3,v_4)\\
&= \hat{R}(\hat{v}_1,\hat{v}_3,\hat{v}_1,\hat{v}_3)+\hat{R}(\hat{v}_1,\hat{v}_4,\hat{v}_1,\hat{v}_4)\\
&\quad \hat{R}(\hat{v}_2,\hat{v}_3,\hat{v}_2,\hat{v}_3)+R(\hat{v}_2,\hat{v}_4,\hat{v}_2,\hat{v}_4)\\
&\quad -2\hat{R}(\hat{v}_1,\hat{v}_2,\hat{v}_3,\hat{v}_4)
\end{aligned}
$$

Como o conjunto $\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3,\hat{e}_4\}$ foi escolhido arbitrariamene, segue que $\hat{R}$ tem curvatura isotrópica não negativa.

□

Corolário 5.1. *Se $\hat{R}$ tem curvatura isotrópica não negativa, então R tem curvatura seccional não negativa.*

Demonstração. De fato, se $\{v_1,v_2\}$ é um conjunto ortonormal qualquer em V, definimos os vetores $\hat{v}_1=(v_1,(0,0))$, $\hat{v}_2=(0,(1,0))$, $\hat{v}_3=(v_2,(0,0))$ e $\hat{v}_4=(0,(0,1))$ em $V\times\mathbb{R}^2$. Observando que $\{\hat{v}_1,\hat{v}_2,\hat{v}_3,\hat{v}_4\}$ e $\hat{R}$ tem curvatura isotrópica não negativa, concluímos que

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \hat{R}(\hat{v}_1,\hat{v}_3,\hat{v}_1,\hat{v}_3)+\hat{R}(\hat{v}_1,\hat{v}_4,\hat{v}_1,\hat{v}_4)\\
&\quad \hat{R}(\hat{v}_2,\hat{v}_3,\hat{v}_2,\hat{v}_3)+R(\hat{v}_2,\hat{v}_4,\hat{v}_2,\hat{v}_4)\\
&\quad -2\hat{R}(\hat{v}_1,\hat{v}_2,\hat{v}_3,\hat{v}_4)\\
&= R(v_1,v_2,v_1,v_2).
\end{aligned}
$$

Como o conjunto $\{v_1,v_2\}$ foi escolhido arbitrariamente, segue que R tem curvatura seccional não negativa.

□

Corolário 5.2. *Se R tem operador de curvatura não negativo, então $\hat{R}$ tem curvatura isotrópica não negativa.*

Demonstração. Considere um conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ e números reais $\lambda, \mu \in [0,1]$. Defina

$$\varphi = e_1 \wedge e_3 + \lambda\mu e_4 \wedge e_2 \in \Lambda^2 V$$

e

$$\psi = \lambda e_1 \wedge e_4 + \mu e_2 \wedge e_3 \in \Lambda^2 V.$$

Como R tem operador de curavtura não negativo, segue que

$$\begin{aligned} 0 \leq R(\varphi,\varphi) + R(\psi,\psi) &= R(e_1,e_3,e_1,e_3) + \lambda^2 R(e_1,e_4,e_1,e_4) \\ &+\mu^2 R(e_2,e_3,e_2,e_3) + \mu^2\lambda^2 R(e_2,e_4,e_2,e_4) \\ &-2\lambda\mu R(e_1,e_2,e_3,e_4). \end{aligned}$$

Segue da Proposição 5.1 que $\hat{R}$ tem curvatura isotrópica não negativa.

□

Proposição 5.6. *O cone $\hat{C}$ é invariante pela E.D.O. de Hamilton $\frac{d}{dt}R = Q(R)$.*

Demonstração. Se $R(t)$, $t \in [0,T)$, é uma solução da E.D.O. de Hamilton com $R(0) \in \hat{C}$, segue que $\hat{R}(t)$ é solução da E.D.O. de Hamilton associada, pois

$$\frac{d}{dt}\hat{R} = \widehat{\left(\frac{d}{dt}R\right)} = \widehat{Q(R)} = Q(\hat{R}).$$

Segue da Proposição 5.4 que $\hat{R}(t) \in C$, para todo $t \in [0,T)$, donde $R(t) \in \hat{C}$, para todo $t \in [0,T)$.

□

Capítulo 6

Resultados de Convergência em dimensões maiores

Este capítulo será dedicado à apresentação do argumento final que demonstra o Teorema da Esfera diferenciável em dimensões maiores que 3, com constante pinçante ótima $\delta = 1/4$. Para isto será fundamental o entendimento de uma construção de cones invariantes por Böhm e Wilking (cf. [5]) que será desenvolvida nas dua primeiras seções deste capítulo.

6.1 A Identidade de Böhm e Wilking

Nesta seção, abordaremos uma identidade algébrica obtida por Böhm e Wilking (cf. [5]). Antes disso, precisaremos de algumas definições.

Definição 6.1. *Considere A e B duas formas bilineares simétricas em $\mathbb{R}^n$. O produto de Kulkarni-Nomizu entre A e B é definido e denotado por*

$$(A \odot B)_{ijkl} = A_{ik}B_{jl} - A_{il}B_{jk} - A_{jk}B_{il} + A_{jl}B_{ik}$$

Observação 6.1. *Da simetria de A e B segue que*

$$(A \odot B)_{jikl} = A_{jk}B_{il} - A_{jl}B_{ik} - A_{ik}B_{jl} + A_{il}B_{jk} = -(A \odot B)_{ijkl}$$

e

$$(A \odot B)_{klij} = A_{ki}B_{lj} - A_{kj}B_{li} - A_{li}B_{kj} + A_{lj}B_{ki} = (A \odot B)_{ijkl}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} & (A \odot B)_{ijkl} + (A \odot B)_{jkil} + (A \odot B)_{kijl} \\ = \; & A_{ik}B_{jl} - A_{il}B_{jk} - A_{jk}B_{il} + A_{jl}B_{ik} \\ & + A_{kj}B_{il} - A_{kl}B_{ij} - A_{ij}B_{kl} + A_{il}B_{kj} \\ & + A_{ji}B_{kl} - A_{jl}B_{ki} - A_{ki}B_{jl} + A_{kl}B_{ij} \\ = \; & 0. \end{aligned}$$

Desta forma, $A \odot B \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$.

Definição 6.2. *Fixados dois números reais* $a, b \geq 0$, *definimos uma transformação linear* $\ell_{a,b} : \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ *que a cada* $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ *associa o tensor*

$$\ell_{a,b}(R) = R + bRic(R) \odot id + \frac{1}{n}(a-b)scal(R) id \odot id$$

Lema 6.1. *Para cada* $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, *temos*

$$\begin{aligned}
&Q(\ell_{a,b}(R))_{ijkl} - Q(R)_{ijkl} \\
&= 2b \sum_{p,q=1}^{n} Ric_{pq}(R_{ipkq}\delta_{jl} - R_{iplq}\delta_{jk} - R_{jpkq}\delta_{il} + R_{jplq}\delta_{ik}) \\
&+(4b + 2(n-2)b^2)(Ric_{ik}Ric_{jl} - Ric_{il}Ric_{jk}) \\
&-2b^2(Ric^2_{ik}\delta_{jl} - Ric^2_{jk}\delta_{il} - Ric^2_{il}\delta_{jk} + Ric^2_{jl}\delta_{ik}) \\
&+\left(2b^2 + \frac{4}{n}(a-b)(1+(n-2)b)\right) \cdot scal(Ric_{ik}\delta_{jl} - Ric_{jk}\delta_{il} - Ric_{il}\delta_{jk} + Ric_{jl}\delta_{ik}) \\
&+2b^2|Ric|^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{8}{n^2}(a-b)(b+(n-1)a)scal^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned}$$

Demonstração. Para abreviar as notações, escreveremos $S = \ell_{a,b}(R)$. Temos que

$$
\begin{aligned}
& (S^2)_{ijkl} - (R^2)_{ijkl} \\
= \ & \sum_{p,q=1}^{n} S_{ijpq}S_{klpq} - \sum_{p,q=1}^{n} R_{ijpq}R_{klpq} \\
= \ & \sum_{p,q=1}^{n} \left[R_{ijpq} + b(\mathrm{Ric}_{ip}\delta_{jq} - \mathrm{Ric}_{iq}\delta_{jp} - \mathrm{Ric}_{jp}\delta_{iq} + \mathrm{Ric}_{jq}\delta_{ip}) + \frac{2}{n}(a-b)\mathrm{scal}(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) \right] \cdot \\
& \left[R_{klpq} + b(\mathrm{Ric}_{kp}\delta_{lq} - \mathrm{Ric}_{kq}\delta_{lp} - \mathrm{Ric}_{lp}\delta_{kq} + \mathrm{Ric}_{lq}\delta_{kp}) + \frac{2}{n}(a-b)\mathrm{scal}(\delta_{kp}\delta_{lq} - \delta_{kq}\delta_{lp}) \right] \\
& - \sum_{p,q=1}^{n} R_{ijpq}R_{klpq} \\
= \ & b\sum_{p,q=1}^{n} R_{ijpq}(\mathrm{Ric}_{kp}\delta_{lq} - \mathrm{Ric}_{kq}\delta_{lp} - \mathrm{Ric}_{lp}\delta_{kq} + \mathrm{Ric}_{lp}\delta_{kq}) + \frac{2}{n}(a-b)\mathrm{scal}\sum_{p,q=1}^{n} R_{ijpq}(\delta_{kp}\delta_{lq} - \delta_{kq}\delta_{lp}) \\
& + b\sum_{p,q=1}^{n} R_{klpq}(\mathrm{Ric}_{ip}\delta_{jq} - \mathrm{Ric}_{iq}\delta_{jp} - \mathrm{Ric}_{jp}\delta_{iq} + \mathrm{Ric}_{jq}\delta_{ip}) \\
& + b^2\sum_{p,q=1}^{n} (\mathrm{Ric}_{ip}\delta_{jq} - \mathrm{Ric}_{iq}\delta_{jp} - \mathrm{Ric}_{jp}\delta_{iq} + \mathrm{Ric}_{jq}\delta_{ip})(\mathrm{Ric}_{kp}\delta_{lq} - \mathrm{Ric}_{kq}\delta_{lp} - \mathrm{Ric}_{lp}\delta_{kq} + \mathrm{Ric}_{lq}\delta_{kp}) \\
& + \frac{2b(a-b)}{n}\mathrm{scal}\sum_{p,q=1}^{n} (\mathrm{Ric}_{ip}\delta_{jq} - \mathrm{Ric}_{iq}\delta_{jp} - \mathrm{Ric}_{jp}\delta_{iq} + \mathrm{Ric}_{jq}\delta_{ip})(\delta_{kp}\delta_{lq} - \delta_{kq}\delta_{lp}) \\
& + \frac{2b(a-b)}{n}\mathrm{scal}\sum_{p,q=1}^{n} (\mathrm{Ric}_{kp}\delta_{lq} - \mathrm{Ric}_{kq}\delta_{lp} - \mathrm{Ric}_{lp}\delta_{kq} + \mathrm{Ric}_{lq}\delta_{kp})(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) \\
& + \frac{2(a-b)}{n}\mathrm{scal}\sum_{p,q=1}^{n} R_{klpq}(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) + \frac{4(a-b)^2}{n^2}\mathrm{scal}^2\sum_{p,q=1}^{n} (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp})(\delta_{kp}\delta_{lq} - \delta_{kq}\delta_{lp}).
\end{aligned}
$$

Lembrando que $\sum_{p=1}^{n} \mathrm{Ric}_{ip}\mathrm{Ric}_{pj} = \mathrm{Ric}^2_{ij}$, arrumamos os cálculos para obter que

$$
\begin{aligned}
(S^2)_{ijkl} - (R^2)_{ijkl} \ = \ & 2b\sum_{p,q=1}^{n} (R_{ijpl}\mathrm{Ric}_{kp} + R_{ijkp}\mathrm{Ric}_{lp} + R_{klpj}\mathrm{Ric}_{ip} + R_{klip}\mathrm{Ric}_{jp}) \\
& + \frac{8(a-b)}{n^2}\mathrm{scal}R_{ijkl} + 4b^2(\mathrm{Ric}_{ik}\mathrm{Ric}_{jl} - \mathrm{Ric}_{il}\mathrm{Ric}_{jk}) \\
& + 2b^2(\mathrm{Ric}^2_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}^2_{il}\delta_{jk} - \mathrm{Ric}^2_{jk}\delta_{il} + \mathrm{Ric}^2_{jl}\delta_{ik}) \\
& + \frac{8(a-b)b}{n}\mathrm{scal}(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}_{il}\delta_{jk} - \mathrm{Ric}_{jk}\delta_{il} + \mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik}) \\
& + \frac{8(a-b)^2}{n^2}\mathrm{scal}^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos que

$$
\begin{aligned}
& (S^{\#})_{ijkl} - (R^{\#})_{ijkl} \\
= \; & 2\sum_{p,q=1}^{n} S_{ipkq}S_{jplq} - 2\sum_{p,q=1}^{n} S_{iplq}S_{jpkq} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}R_{jplq} + 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{iplq}R_{jpkq} \\
= \; & 2\sum_{p,q=1}^{n} \left[R_{ipkq} + b(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{iq}\delta_{pk} - \mathrm{Ric}_{pk}\delta_{iq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{ik}) + \frac{2}{n}(a-b)\mathrm{scal}(\delta_{ik}\delta_{pq} - \delta_{iq}\delta_{pk})\right] \cdot \\
& \left[R_{jplq} + b(\mathrm{Ric}_{jl}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{jq}\delta_{pl} - \mathrm{Ric}_{pl}\delta_{jq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{jl}) + \frac{2}{n}(a-b)\mathrm{scal}(\delta_{jl}\delta_{pq} - \delta_{jq}\delta_{pl})\right] \\
& -2\sum_{p,q=1}^{n} \left[R_{iplq} + b(\mathrm{Ric}_{il}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{iq}\delta_{pl} - \mathrm{Ric}_{pl}\delta_{iq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{il}) + \frac{2}{n}(a-b)\mathrm{scal}(\delta_{il}\delta_{pq} - \delta_{iq}\delta_{pl})\right] \cdot \\
& \left[R_{jpkq} + b(\mathrm{Ric}_{jk}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{jq}\delta_{pk} - \mathrm{Ric}_{pk}\delta_{jq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{jk}) + \frac{2}{n}(a-b)\mathrm{scal}(\delta_{jk}\delta_{pq} - \delta_{jq}\delta_{pk})\right] \\
& -2\sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}R_{jplq} + 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{iplq}R_{jpkq}.
\end{aligned}
$$

Faremos este maçante cálculo por partes.

(1) Temos que

$$\begin{aligned}
& 2b\sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}(\mathrm{Ric}_{jl}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{jq}\delta_{pl} - \mathrm{Ric}_{pl}\delta_{jq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{jl}) \\
& +2b\sum_{p,q=1}^{n} R_{jplq}(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{iq}\delta_{pk} - \mathrm{Ric}_{pk}\delta_{iq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{ik}) \\
& -2b\sum_{p,q=1}^{n} R_{iplq}(\mathrm{Ric}_{jk}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{jq}\delta_{pk} - \mathrm{Ric}_{pk}\delta_{jq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{jk}) \\
& -2b\sum_{p,q=1}^{n} R_{jpkq}(\mathrm{Ric}_{il}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{iq}\delta_{pl} - \mathrm{Ric}_{pl}\delta_{iq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{il}) \\
= \; & -2b\sum_{p=1}^{n}(\mathrm{Ric}_{jp}R_{ilkp} + \mathrm{Ric}_{pl}R_{ipkj} + \mathrm{Ric}_{ip}R_{jklp} + \mathrm{Ric}_{pk}R_{jpli}) \\
& +2b\sum_{p=1}^{n}(\mathrm{Ric}_{jp}R_{iklp} + \mathrm{Ric}_{pk}R_{iplj} + \mathrm{Ric}_{ip}R_{jlkp} + \mathrm{Ric}_{pl}R_{jpki}) \\
& +2b\sum_{p,q=1}^{n} \mathrm{Ric}_{pq}(R_{ipkq}\delta_{jl} - R_{iplq}\delta_{jk} - R_{jpkq}\delta_{il} + R_{jplq}\delta_{ik}) \\
& +4b(\mathrm{Ric}_{jl}\mathrm{Ric}_{ik} - \mathrm{Ric}_{jk}\mathrm{Ric}_{il}) \\
= \; & -2b\sum_{p=1}^{n}(\mathrm{Ric}_{jp}R_{ipkl} + \mathrm{Ric}_{lp}R_{ijkp} + \mathrm{Ric}_{ip}R_{pjkl} + \mathrm{Ric}_{kp}R_{ijpl}) \\
& +2b\sum_{p,q=1}^{n} \mathrm{Ric}_{pq}(R_{ipkq}\delta_{jl} - R_{iplq}\delta_{jk} - R_{jpkq}\delta_{il} + R_{jplq}\delta_{ik}) \\
& +4b(\mathrm{Ric}_{jl}\mathrm{Ric}_{ik} - \mathrm{Ric}_{jk}\mathrm{Ric}_{il}).
\end{aligned}$$

Na última igualdade, utilizamos a 2^a Identidade de Bianchi.

(2) Temos que

$$\begin{aligned}
& \frac{4(a-b)}{n}\mathrm{scal}\sum_{p,q=1}^{n}[R_{ipkq}(\delta_{jl}\delta_{pq} - \delta_{jq}\delta_{pl}) + R_{jplq}(\delta_{ik}\delta_{pq} - \delta_{iq}\delta_{pk}) \\
& -R_{iplq}(\delta_{jk}\delta_{pq} - \delta_{jq}\delta_{pk}) - R_{jpkq}(\delta_{il}\delta_{pq} - \delta_{iq}\delta_{pl})] \\
= \; & \frac{4(a-b)}{n}\mathrm{scal}(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl} - R_{ilkj} + \mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik} - R_{jkli}) \\
& +\frac{4(a-b)}{n}\mathrm{scal}(-\mathrm{Ric}_{il}\delta_{jk} + R_{iklj} - \mathrm{Ric}_{jk}\delta_{il} + R_{jlki})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \frac{4(a-b)}{n}\mathrm{scal}(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}_{il}\delta_{jk} - \mathrm{Ric}_{jk}\delta_{il} + \mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik}) \\
& -\frac{8(a-b)}{n}\mathrm{scal}R_{ijkl}
\end{aligned}
$$

(3) Como

$$
\begin{aligned}
& \sum_{p,q=1}^{n}(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{iq}\delta_{pk} - \mathrm{Ric}_{pk}\delta_{iq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{ik}) \cdot \\
& (\mathrm{Ric}_{jl}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{jq}\delta_{pl} - \mathrm{Ric}_{pl}\delta_{jq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{jl}) \\
= \; & n\mathrm{Ric}_{ik}\mathrm{Ric}_{jl} - \mathrm{Ric}_{ik}\mathrm{Ric}_{jl} - \mathrm{Ric}_{ik}\mathrm{Ric}_{jl} + \mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl}\mathrm{scal} \\
& -\mathrm{Ric}_{jl}\mathrm{Ric}_{ik} + \mathrm{Ric}^2_{ij}\delta_{kl} + \mathrm{Ric}_{ij}\mathrm{Ric}_{kl} - \delta_{jl}\mathrm{Ric}^2_{ik} \\
& -\mathrm{Ric}_{jl}\mathrm{Ric}_{ik} + \mathrm{Ric}_{lk}\mathrm{Ric}_{ij} + \mathrm{Ric}^2_{kl}\delta_{ij} - \delta_{jl}\mathrm{Ric}^2_{ik} \\
& \mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik}\mathrm{scal} - \mathrm{Ric}^2_{jl}\delta_{ik} - \mathrm{Ric}^2_{jl}\delta_{ik} + \delta_{ik}\delta_{jl}|\mathrm{Ric}|^2 \\
= \; & (n-4)\mathrm{Ric}_{ik}\mathrm{Ric}_{jl} + 2\mathrm{Ric}_{ij}\mathrm{Ric}_{lk} + \mathrm{scal}(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl} + \mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik}) \\
& -2(\mathrm{Ric}^2_{ik}\delta_{jl} + \mathrm{Ric}^2_{jl}\delta_{ik}) + \mathrm{Ric}^2_{ij}\delta_{kl} + \mathrm{Ric}^2_{kl}\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl}|\mathrm{Ric}|^2,
\end{aligned}
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
& 2b^2\sum_{p,q=1}^{n}(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{iq}\delta_{pk} - \mathrm{Ric}_{pk}\delta_{iq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{ik}) \cdot \\
& (\mathrm{Ric}_{jl}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{jq}\delta_{pl} - \mathrm{Ric}_{pl}\delta_{jq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{jl}) \\
& -2b^2\sum_{p,q=1}^{n}(\mathrm{Ric}_{il}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{iq}\delta_{pl} - \mathrm{Ric}_{pl}\delta_{iq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{il}) \cdot \\
& (\mathrm{Ric}_{jk}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{jq}\delta_{pk} - \mathrm{Ric}_{pk}\delta_{jq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{jk}) \\
= \; & 2b^2(n-4)(\mathrm{Ric}_{ik}\mathrm{Ric}_{jl} - \mathrm{Ric}_{il}\mathrm{Ric}_{jk}) \\
& +2b^2(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}_{il}\delta_{jk} - \mathrm{Ric}_{jk}\delta_{il} + \mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik}) \\
& -4b^2(\mathrm{Ric}^2_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}^2_{il}\delta_{jk} - \mathrm{Ric}^2_{jk}\delta_{il} + \mathrm{Ric}^2_{jl}\delta_{ik}) \\
& +2b^2|\mathrm{Ric}|^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})
\end{aligned}
$$

(4) Observando que

$$
\begin{aligned}
& \sum_{p,q=1}^{n}(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{iq}\delta_{pk} - \mathrm{Ric}_{pk}\delta_{iq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{ik})(\delta_{jl}\delta_{pq} - \delta_{jq}\delta_{pl}) \\
& + \sum_{p,q=1}^{n}(\mathrm{Ric}_{jl}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{jq}\delta_{pl} - \mathrm{Ric}_{pl}\delta_{jq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{jl})(\delta_{ik}\delta_{pq} - \delta_{iq}\delta_{pk}) \\
= \; & (n-4)(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl} + \mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik}) + 2(\mathrm{Ric}_{ij}\delta_{kl} + \mathrm{Ric}_{kl}\delta_{ij}) + 2\delta_{ik}\delta_{jl}\mathrm{scal},
\end{aligned}
$$

teremos

$$
\begin{aligned}
& \frac{4b(a-b)}{n}\mathrm{scal}\sum_{p,q=1}^{n}(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{pq}-\mathrm{Ric}_{iq}\delta_{pk}-\mathrm{Ric}_{pk}\delta_{iq}+\mathrm{Ric}_{pq}\delta_{ik})(\delta_{jl}\delta_{pq}-\delta_{jq}\delta_{pl}) \\
& +\frac{4b(a-b)}{n}\mathrm{scal}\sum_{p,q=1}^{n}(\mathrm{Ric}_{jl}\delta_{pq}-\mathrm{Ric}_{jq}\delta_{pl}-\mathrm{Ric}_{pl}\delta_{jq}+\mathrm{Ric}_{pq}\delta_{jl})(\delta_{ik}\delta_{pq}-\delta_{iq}\delta_{pk}) \\
& -\frac{4b(a-b)}{n}\mathrm{scal}\sum_{p,q=1}^{n}(\mathrm{Ric}_{il}\delta_{pq}-\mathrm{Ric}_{iq}\delta_{pl}-\mathrm{Ric}_{pl}\delta_{iq}+\mathrm{Ric}_{pq}\delta_{il})(\delta_{jk}\delta_{pq}-\delta_{jq}\delta_{pk}) \\
& -\frac{4b(a-b)}{n}\mathrm{scal}\sum_{p,q=1}^{n}(\mathrm{Ric}_{jk}\delta_{pq}-\mathrm{Ric}_{jq}\delta_{pk}-\mathrm{Ric}_{pk}\delta_{jq}+\mathrm{Ric}_{pq}\delta_{jk})(\delta_{il}\delta_{pq}-\delta_{iq}\delta_{pl}) \\
= & \frac{4b(a-b)(n-4)}{n}\mathrm{scal}(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl}-\mathrm{Ric}_{il}\delta_{jk}-\mathrm{Ric}_{jk}\delta_{il}+\mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik}) \\
& +\frac{8b(a-b)}{n}\mathrm{scal}^2(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned}
$$

Segue de **(1)**, **(2)**, **(3)** e **(4)** que

$$
\begin{aligned}
& (S^{\#})_{ijkl}-(R^{\#})_{ijkl} \\
= & -2b\sum_{p=1}^{n}(\mathrm{Ric}_{jp}R_{ipkl}+\mathrm{Ric}_{lp}R_{ijkp}+\mathrm{Ric}_{ip}R_{pjkl}+\mathrm{Ric}_{kp}R_{ijpl}) \\
& +2b\sum_{p,q=1}^{n}\mathrm{Ric}_{pq}(R_{ipkq}\delta_{jl}-R_{iplq}\delta_{jk}-R_{jpkq}\delta_{il}+R_{jplq}\delta_{ik}) \\
& -\frac{8(a-b)}{n}\mathrm{scal}R_{ijkl}+(4b+2(n-4)b^2)(\mathrm{Ric}_{jl}\mathrm{Ric}_{ik}-\mathrm{Ric}_{jk}\mathrm{Ric}_{il}) \\
& -4b^2(\mathrm{Ric}^2_{ik}\delta_{jl}-\mathrm{Ric}^2_{il}\delta_{jk}-\mathrm{Ric}^2_{jk}\delta_{il}+\mathrm{Ric}^2_{jl}\delta_{ik}) \\
& +\left(2b^2+\frac{4}{n}(a-b)(1+(n-4)b)\right)\mathrm{scal}(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl}-\mathrm{Ric}_{il}\delta_{jk}-\mathrm{Ric}_{jk}\delta_{il}+\mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik}) \\
& +2b^2|\mathrm{Ric}|^2(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})+\frac{8}{n^2}(a-b)(2b+(n-2)a)\mathrm{scal}^2(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}). \qquad (6.2)
\end{aligned}
$$

Somando (6.1) com (6.2), obtemos o resultado desejado.

□

Lema 6.2. *Para cada $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, temos*

$$
\begin{aligned}
& \ell_{a,b}(Q(R))_{ijkl}-Q(R)_{ijkl} \\
= & 2b\sum_{p,q=1}^{n}Ric_{pq}(R_{ipkq}\delta_{jl}-R_{iplq}\delta_{jk}-R_{jpkq}\delta_{il}+R_{jplq}\delta_{ik}) \\
& +\frac{4}{n}(a-b)|Ric|^2(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned}
$$

Demonstração. Se escrevemos $T = Q(R)$, já vimos que

$$\mathrm{Ric}(T)_{ik} = \sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}\mathrm{Ric}_{pq} \ \text{ e } \ \mathrm{scal}(T) = 2|\mathrm{Ric}|^2.$$

Assim, utilizando a definição de $\ell_{a,b}$, segue que

$$\begin{aligned}
\ell_{a,b}(T)_{ijkl} - T_{ijkl} &= b(\mathrm{Ric}(T)_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}(T)_{il}\delta_{jk} - \mathrm{Ric}(T)_{jk}\delta_{il} + \mathrm{Ric}(T)_{jl}\delta_{ik}) \\
&\quad + \frac{2}{n}(a-b)\mathrm{scal}(T)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \\
&= 2b\sum_{p,q=1}^{n} \mathrm{Ric}_{pq}(R_{ipkq}\delta_{jl} - R_{iplq}\delta_{jk} - R_{jpkq}\delta_{il} + R_{jplq}\delta_{ik}) \\
&\quad + \frac{4}{n}(a-b)|\mathrm{Ric}|^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned}$$

□

Lema 6.3. *Para cada $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, temos*

$$\begin{aligned}
Q(\ell_{a,b}(R)) &= \ell_{a,b}(Q(R)) + (2b + (n-2)b^2)Ric \odot Ric - 2b^2 Ric^2 \odot id \\
&\quad + \left(2b^2 + \frac{4}{n}(a-b)(1+(n-2)b)\right) scalRic \odot id \\
&\quad + \frac{1}{n}(nb^2 - 2(a-b))|Ric^2| id \odot id \\
&\quad + \frac{4}{n^2}(a-b)(b+(n-1)a) scal^2 id \odot id.
\end{aligned}$$

Demonstração. Subraindo as identidades obtidas nos Lemas 6.1 e 6.2, teremos

$$\begin{aligned}
Q(\ell_{a,b}(R)) - \ell_{a,b}(Q(R)) &= (2b + (n-2)b^2)(2\mathrm{Ric}_{ik}\mathrm{Ric}_{jl} - 2\mathrm{Ric}_{il}\mathrm{Ric}_{jk}) \\
&\quad - 2b^2(\mathrm{Ric}^2_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}^2_{il}\delta_{jk} - \mathrm{Ric}^2_{jk}\delta_{il} + \mathrm{Ric}^2_{jl}\delta_{ik}) \\
&\quad + \left[2b^2 + \frac{4}{n}(a-b)(1+(n-2)b)\right]\mathrm{scal}\cdot \\
&\quad (\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}_{il}\delta_{jk} - \mathrm{Ric}_{jk}\delta_{il} + \mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik}) \\
&\quad + \frac{1}{n}(nb^2 - 2(a-b))|\mathrm{Ric}|^2(2\delta_{ik}\delta_{jl} - 2\delta_{il}\delta_{jk}) \\
&\quad + \frac{4}{n^2}(a-b)(b+(n-1)a)\mathrm{scal}^2(2\delta_{ik}\delta_{jl} - 2\delta_{il}\delta_{jk})
\end{aligned}$$

Utilizando a definição do Produto de Kulkarni-Nomizu, nossa assertiva segue.

$\square$

Dado qualquer $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, considere

$$\begin{aligned} D_{a,b}(R) &= [(n-2)b^2 - 2(a-b)] \overset{o}{\mathrm{Ric}} \odot \overset{o}{\mathrm{Ric}} \\ &+2a\mathrm{Ric} \odot \mathrm{Ric} + 2b^2 \overset{o}{\mathrm{Ric}}^{\,2} \odot \mathrm{id} \\ &+\frac{nb^2(1-2b) - 2(a-b)(1-2b+nb^2)}{n[1+2(n-1)a]} | \overset{o}{\mathrm{Ric}} |^2 \mathrm{id} \odot \mathrm{id}. \end{aligned}$$

Temos que $D_{a,b}(R) \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 6.1. *Dado $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, temos que*

$$\begin{aligned} Ric(D_{a,b}(R)) &= -4bRic^2 + \frac{4}{n}(2b+(n-2)a)scalRic \\ &+2\frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{n(1+2(n-1)a)} | \overset{o}{Ric} |^2 id \\ &+\frac{4}{n^2}(a-b)scal^2 id \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} scal(D_{a,b}(R)) &= \frac{4(n-1)}{n} ascal^2 - 4b| \overset{o}{Ric} |^2 \\ &+2\frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{1+2(n-1)a} | \overset{o}{Ric} |^2 \end{aligned}$$

Demonstração. Inicialmente, note que se A e B são formas bilineares simétricas, temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(A \odot B)_{ik} &= \sum_{j,l=1}^{n} (A \odot B)_{ijkl} \\ &= \sum_{j,l=1}^{n} (A_{ik}B_{jl} - A_{il}B_{jk} - A_{jk}B_{il} + A_{jl}B_{ik}) \\ &= A_{ik} \cdot \mathrm{tr}B + B_{ik} \cdot \mathrm{tr}A - (AB+BA)_{ik}. \end{aligned}$$

Usando a linearidade do tensor de Ricci e a observação acima concluímos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(D_{a,b}(R)) &= -4b\mathrm{Ric}^2 + \frac{4}{n}(2b+(n-2)a)\mathrm{scalRic} \\ &+2\frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{n(1+2(n-1)a)} | \overset{o}{\mathrm{Ric}} |^2 \mathrm{id} \\ &+\frac{4}{n^2}(a-b)\mathrm{scal}^2 \mathrm{id} \qquad (6.3) \end{aligned}$$

Levando em conta que $\mathrm{tr}(\mathrm{Ric}) = \mathrm{scal}$, $\mathrm{tr}(\mathrm{id}) = n$ e $\mathrm{tr}(\mathrm{Ric}^2) = |\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2 + \frac{1}{n}\mathrm{scal}^2$, tomamos o traço de (6.3) para obter que

$$\begin{aligned}\mathrm{scal}(D_{a,b}(R)) &= \frac{4(n-1)}{n}a\mathrm{scal}^2 - 4b|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2 \\ &\quad +2\frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{1+2(n-1)a}|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2\end{aligned}$$

□

Proposição 6.2 (C.Böhm, B.Wilking, [5]). *Dado $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, temos que*

$$\ell_{a,b}^{-1}(Q(\ell_{a,b}(R))) = Q(R) + D_{a,b}(R).$$

Demonstração. Lembrando que $\overset{o}{\mathrm{Ric}}_{ij} = \mathrm{Ric}_{ij} - \frac{1}{n}\mathrm{scal}\delta_{ij}$, segue da definição de $D_{a,b}(R)$ que

$$\begin{aligned}D_{a,b}(R) &= [(n-2)b^2 - 2(a-b)]\left(\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\mathrm{scal}\cdot\mathrm{id}\right) \odot \left(\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\mathrm{scal}\cdot\mathrm{id}\right) \\ &\quad +2a\mathrm{Ric}\odot\mathrm{Ric} + 2b^2\left(\mathrm{Ric}^2 - \frac{2}{n}\mathrm{scal}\mathrm{Ric} + \frac{1}{n^2}\mathrm{scal}^2\mathrm{id}\right)\odot\mathrm{id} \\ &\quad +\frac{nb^2(1-2b) - 2(a-b)(1-2b+nb^2)}{n[1+2(n-1)a]}|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2\mathrm{id}\odot\mathrm{id} \\ &= (2b+(n-2)b^2)\mathrm{Ric}\odot\mathrm{Ric} + 2b^2\mathrm{Ric}^2\odot\mathrm{id} \\ &\quad +\frac{nb^2(1-2b) - 2(a-b)(1-2b+nb^2)}{n[1+2(n-1)a]}|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2\mathrm{id}\odot\mathrm{id} \\ &\quad +\frac{1}{n^2}(nb^2 - 2(a-b))\mathrm{scal}^2\mathrm{id}\odot\mathrm{id} \\ &\quad -\frac{2}{n}(nb^2 - 2(a-b))\mathrm{scal}\cdot\mathrm{Ric}\odot\mathrm{id}.\end{aligned}$$

Assim, utilizando a observalção acima, a definição de $\ell_{a,b}$ e a Proposição 6.1, teremos que

$$
\begin{aligned}
\ell_{a,b}(D_{a,b}(R)) &= (2b+(n-2)b^2)\mathrm{Ric}\odot\mathrm{Ric}+2b^2\mathrm{Ric}^2\odot\mathrm{id}\\
&+\frac{nb^2(1-2b)-2(a-b)(1-2b+nb^2)}{n[1+2(n-1)a]}|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2\mathrm{id}\odot\mathrm{id}\\
&+\frac{1}{n^2}(nb^2-2(a-b))\mathrm{scal}^2\mathrm{id}\odot\mathrm{id}\\
&-\frac{2}{n}(nb^2-2(a-b))\mathrm{scal}\cdot\mathrm{Ric}\odot\mathrm{id}\\
&+b\left[-4b\mathrm{Ric}^2+\frac{4}{n}(2b+(n-2)a)\mathrm{scal}\cdot\mathrm{Ric}\right]\odot\mathrm{id}\\
&+\left[2\frac{n^2b^2-2(n-1)(a-b)(1-2b)}{n(1+2(n-1)a)}|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2\mathrm{id}+\frac{4}{n^2}(a-b)\mathrm{scal}^2\mathrm{id}\right]\odot\mathrm{id}\\
&+\frac{1}{n}(a-b)\left[\frac{4(n-1)}{n}a\mathrm{scal}^2-4b|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2\right]\mathrm{id}\odot\mathrm{id}\\
&+\frac{1}{n}(a-b)\left[2\frac{n^2b^2-2(n-1)(a-b)(1-2b)}{1+2(n-1)a}|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2\right]\mathrm{id}\odot\mathrm{id}\\
&= (2b+(n-2)b^2)\mathrm{Ric}(D_{a,b}(R))\odot\mathrm{Ric}(D_{a,b}(R))-2b^2\mathrm{Ric}(D_{a,b}(R))^2\odot\mathrm{id}\\
&+\left[2b^2+\frac{4}{n}(a-b)(1+(n-2)b)\right]\mathrm{scal}(D_{a,b}(R))\mathrm{Ric}(D_{a,b}(R))\odot\mathrm{id}\\
&+\frac{1}{n}(nb^2-2(a-b))|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2\mathrm{id}\odot\mathrm{id}\\
&+\frac{1}{n^2}(nb^2-2(a-b))\mathrm{scal}(D_{a,b}(R))^2\mathrm{id}\odot\mathrm{id}\\
&+\frac{4}{n^2}(a-b)(b+(n-1)a)\mathrm{scal}(D_{a,b}(R))^2\mathrm{id}\odot\mathrm{id}.
\end{aligned}
$$

Lembrando que $|\mathrm{Ric}|^2=|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2+\frac{1}{n}\mathrm{scal}^2$, usamos o Lema 6.3, para concluir que

$$Q(\ell_{a,b}(R))=\ell_{a,b}(Q(R))+\ell_{a,b}(D_{a,b}(R)).$$

Disto segue nossa proposição.

□

6.2 Contruindo uma família de cones invariantes

Considere um cone $C\subset\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, com $n\geq 4$. Diremos que C satizfaz a condição $(*)$ se

- C é fechado, convexo e $O(n)$-invariante;
- C é invariante pela E.D.O. de Hamilton $\frac{d}{dt}R=Q(R)$;
- Se $R\in C$, então R tem curvatura seccional não negativa;

- Se $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ tem operador de curvatura não negativo, então $R \in C$.

Um exemplo de um cone que satisfaz a condição $(*)$ é o cone $\hat{C}$ definido na seção 5.3 (cf. Corolários 5.1 e 5.2 e Proposição 5.6). No que segue esta seção, estabeleceremos duas deformações de cones invariantes, demonstradas primordialmente por Böhm e Wilking (cf. [5]).

Proposição 6.3. *Seja $C \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ um cone satizfazendo a condição $(*)$. Fixado $b \in (0, 1/2]$, considere*

$$2a = \frac{2b + (n-2)b^2}{1 + (n-2)b^2} \quad e \quad \delta = 1 - \frac{1}{1 + (n-2)b^2}.$$

Então, o cone

$$C(a) = \left\{ \ell_{a,b}(R); R \in C \quad e \quad Ric(R) \geq \frac{\delta}{n} scal(R) \cdot id \right\}$$

é tranversalmente invariante pela E.D.O. de Hamilton $\frac{d}{dt}R = Q(R)$.

Demonstração. Em vista da Proposição 6.2, basta mostrarmos que o conjunto

$$\tilde{C}(a) = \left\{ R \in C; \mathrm{Ric}(R) \geq \frac{\delta}{n} \mathrm{scal}(R) \cdot \mathrm{id} \right\}$$

é tranversalmente invariante pela E.D.O. $\frac{d}{dt}R = Q(R) + D_{a,b}(R)$.

Para isto, considere um tensor $R \in \partial\tilde{C}(a)/\{0\}$ tal que $\mathrm{Ric}(R) \geq \frac{\delta}{n}\mathrm{scal} \cdot \mathrm{id}$. Para completar a demonstração verificaremos as duas afirmações que se seguem:

(i) A soma $Q(R) + D_{a,b}(R)$ está no interior do cone tangente $T_R C$.

Como C é invariante pela E.D.O. $\frac{d}{dt}R = Q(R)$, segue do Corolário 4.1 que $Q(R)$ pertence ao cone tangente $T_R C$, para todo $R \in C$.

Após um recalonamento da métrica, podemos supor que $\mathrm{scal} = n$. Considere uma base ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ que diagonaliza $\overset{o}{\mathrm{Ric}}$, isto é, $\overset{o}{\mathrm{Ric}}(e_i, e_j) = 0$, se $i \neq j$, e os autovalores de $\overset{o}{\mathrm{Ric}}$ serão dados por $\lambda_i = \overset{o}{\mathrm{Ric}}(e_i, e_i)$. Em particular, temos que

$$\mathrm{Ric}(e_i, e_j) = \overset{o}{\mathrm{Ric}}(e_i, e_j) + \frac{1}{n}\mathrm{scal}\delta_{ij} = 0, \quad \text{se} \quad i \neq j,$$

e

$$\mathrm{Ric}(e_i, e_i) = \overset{o}{\mathrm{Ric}}(e_i, e_i) + \frac{1}{n}\mathrm{scal}\delta_{ii} = \lambda_i + 1.$$

Além disso, segue da condição $\mathrm{Ric}(R) \geq \frac{\delta}{n}\mathrm{scal}(R) \cdot \mathrm{id}$ que

$$\lambda_i + 1 = \mathrm{Ric}(e_i, e_i) \geq \frac{\delta}{n}\mathrm{scal}\delta_{ii},$$

Lembrando a definição de δ, chegamos que

$$\lambda_k \geq \delta - 1 = -\frac{1}{1+(n-2)b^2}, \tag{6.4}$$

para todo $1 \leq k \leq n$.

Afirmamos que, se $i \neq j$, $e_i \wedge e_j$ é um autovetor do operador de curvatura de $D_{a,b}(R)$ com autovalor $\sigma_{ij} = D_{a,b}(R)(e_i, e_j, e_i, e_j)$. Isto pode ser demonstrado, observando que se $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de autovetores das formas bilineares simétricas A e B são com $Ae_i = a_i e_i$ e $Be_j = b_j e_j$, temos

$$\begin{aligned} A \odot B(e_i \wedge e_j) &= (A \odot B)(e_i, e_j, e_i, e_j) \\ &= A(e_i, e_i)B(e_j, e_j) - A(e_i, e_j)B(e_i, e_j) \\ &\quad -A(e_i, e_j)B(e_i, e_j) + A(e_j, e_j)B(e_i, e_i) \\ &= (a_i b_j + a_j b_i)(e_i \wedge e_j). \end{aligned}$$

Como $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de autovetores das formas bilineares $\overset{o}{\mathrm{Ric}}$, Ric e id, segue da observação acima e da definição de $D_{a,b}(R)$ que os autovalores de $D_{a,b}(R)$ são dados por σ_{ij}, onde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_{ij} &= ((n-2)b^2 - 2(a-b))\lambda_i \lambda_j \\ &\quad +2a(\lambda_i + 1)(\lambda_j + 1) + b^2(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) \\ &\quad +\frac{nb^2(1-2b) - 2(a-b)(1-2b+nb^2)}{n(1+2(n-1)a)} |\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2. \end{aligned}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
&[(n-2)b^2 - 2(a-b)]\lambda_i\lambda_j + 2a(\lambda_i+1)(\lambda_j+1)\\
&= [(n-2)b^2 + 2b]\lambda_i\lambda_j + 2a(\lambda_i+\lambda_j+1)\\
&= [(n-2)b^2 + 2b]\left(\lambda_i + \frac{1}{1+(n-2)b^2}\right)\left(\lambda_j + \frac{1}{1+(n-2)b^2}\right)\\
&-\frac{(n-2)b^2+2b}{1+(n-2)b^2}\left(\lambda_i+\lambda_j+\frac{1}{1+(n-2)b^2}\right)\\
&+2a\left(\lambda_i+\lambda_j+\frac{1}{1+(n-2)b^2}\right) - \frac{2a}{1+(n-2)b^2} + 2a\\
&= [(n-2)b^2 + 2b]\left(\lambda_i + \frac{1}{1+(n-2)b^2}\right)\left(\lambda_j + \frac{1}{1+(n-2)b^2}\right)\\
&+\left(\lambda_i+\lambda_j+\frac{1}{1+(n-2)b^2}\right)\left(2a - \frac{(n-2)b^2+2b}{1+(n-2)b^2}\right)\\
&+\frac{2a(n-2)b^2}{1+(n-2)b^2}\\
&= [(n-2)b^2 + 2b]\left(\lambda_i + \frac{1}{1+(n-2)b^2}\right)\left(\lambda_j + \frac{1}{1+(n-2)b^2}\right)\\
&+\frac{2a(n-2)b^2}{1+(n-2)b^2},
\end{aligned}
$$

pois $2a = \frac{2b+(n-2)b^2}{1+(n-2)b^2}$. Desta forma, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sigma_{ij} &= [(n-2)b^2 + 2b]\left(\lambda_i + \frac{1}{1+(n-2)b^2}\right)\left(\lambda_j + \frac{1}{1+(n-2)b^2}\right)\\
&+\frac{2a(n-2)b^2}{1+(n-2)b^2} + b^2(\lambda_i^2+\lambda_j^2)\\
&+\frac{nb^2(1-2b) - 2(a-b)(1-2b+nb^2)}{n(1+2(n-1)a)}|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2.
\end{aligned}
$$

Como $a, b > 0$, $n \geq 4$ e vale (6.4), concluímos que

$$
\frac{1}{2}\sigma_{ij} > \frac{nb^2(1-2b) - 2(a-b)(1-2b+nb^2)}{n(1+2(n-1)a)}|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2.
$$

Lembrando da definição de a, temos que

$$
\begin{aligned}
& nb^2(1-2b) - 2(a-b)(1-2b+nb^2) \\
&= nb^2(1-2b) - \frac{2b+(n-2)b^2}{1+(n-2)b^2}(1-2b+nb^2) + 2b(1-2b+nb^2) \\
&= (1-2b)\left(nb^2 - \frac{2b+(n-2)b^2}{1+(n-2)b^2} + 2b\right) - nb^2\left(\frac{2b+(n-2)b^2}{1+(n-2)b^2} - 2b\right) \\
&= \frac{1-2b}{1+(n-2)b^2}[(n-2)b^2nb^2 + 2b^2 + 2b(n-2)b^2] \\
&- \frac{nb^2}{1+(n-2)b^2}[(n-2)b^2 - 2b(n-2)b^2] \\
&= \frac{2b^2(1-2b)}{1+(n-2)b^2}(1+(n-2)b) \\
&> 0,
\end{aligned}
$$

pois $b \in (0, 1/2]$. Com isto, concluímos que $\sigma_{ij} > 0$, para todos $1 \leq i, j \geq n$. Isto significa que $D_{a,b}(R)$ tem operador de curvatura positivo. Como C é um cone que satisfaz a condição $(*)$, segue que $D_{a,b}(R) \in C$. Daí, $D_{a,b}(R)$ pertence ao interior do cone tangente T_RC. Como já vimos que $Q(R) \in T_RC$, segue que $Q(R) + D_{a,b}(R)$ está no interior do cone tangente T_RC.

(ii) Se $v \in \mathbb{R}^n$ é um vetor unitário tal que $\mathrm{Ric}(v,v) = \frac{\delta}{n}\mathrm{scal} \cdot \mathrm{id}$, então

$$
\mathrm{Ric}(Q(R))(v,v) + \mathrm{Ric}(D_{a,b}(R))(v,v) > \frac{\delta}{n}\mathrm{scal}(Q(R)) + \frac{\delta}{n}\mathrm{scal}(D_{a,b}(R)).
$$

Supondo que scal $= n$, teremos que $\mathrm{Ric}(v,v) = \delta$, onde $v \in \mathbb{R}^n$ é um vetor unitário. Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(Q(R))(v,v) &= 2\sum_{k=1}^{n} R(v, e_k, v, e_k)\mathrm{Ric}(e_k, e_k) \\
&\geq 2\delta \mathrm{Ric}(v,v) \\
&= 2\delta^2,
\end{aligned}
$$

e

$$
\mathrm{scal}(Q(R)) = 2|\mathrm{Ric}|^2 = 2n + 2|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2.
$$

Desta forma,

$$
\mathrm{Ric}(Q(R))(v,v) - \frac{\delta}{n}\mathrm{scal}(Q(R)) = -2\delta(1-\delta) - \frac{2}{n}\delta|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2. \tag{6.5}
$$

Utilizando a Proposição 6.1, também vemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(D_{a,b}(R)) &= -4b\delta^2 + 4(2b+(n-2)a)\delta + 4(a-b) \\
&\quad +2\frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{1+2(n-1)a} |\overset{o}{\operatorname{Ric}}|^2,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{scal}(D_{a,b}(R)) &= 4n(n-1)a - 4b|\overset{o}{\operatorname{Ric}}|^2 \\
&\quad +2\frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{1+2(n-1)a} |\overset{o}{\operatorname{Ric}}|^2,
\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ric}(D_{a,b}(R))(v,v) - \frac{\delta}{n}\operatorname{scal}(D_{a,b}(R)) \\
&= 4a(1-\delta) - 4b(1-\delta)^2 + \frac{4b}{n}\delta|\overset{o}{\operatorname{Ric}}|^2 \\
&+2\frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{1+2(n-1)a}(1-\delta)|\overset{o}{\operatorname{Ric}}|^2. \qquad (6.6)
\end{aligned}$$

Segue de (6.5) e (6.6) que

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ric}(Q(R))(v,v) + \operatorname{Ric}(D_{a,b}(R))(v,v) - \frac{\delta}{n}\operatorname{scal}(Q(R)) - \frac{\delta}{n}\operatorname{scal}(D_{a,b}(R)) \\
&\geq -2(1-\delta)(\delta - 2a + 2b(1-\delta)) - \frac{2(1-2b)}{n}\delta|\overset{o}{\operatorname{Ric}}|^2 \\
&+2\frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{1+2(n-1)a}(1-\delta)|\overset{o}{\operatorname{Ric}}|^2.
\end{aligned}$$

Segue das nossas escolhas de a e δ que $\delta - 2a + 2b(1-\delta) = 0$, de onde obtemos que

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ric}(Q(R))(v,v) + \operatorname{Ric}(D_{a,b}(R))(v,v) - \frac{\delta}{n}\operatorname{scal}(Q(R)) - \frac{\delta}{n}\operatorname{scal}(D_{a,b}(R)) \\
&\geq -\frac{2(1-2b)}{n}\delta|\overset{o}{\operatorname{Ric}}|^2 \\
&+2\frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{1+2(n-1)a}(1-\delta)|\overset{o}{\operatorname{Ric}}|^2 \\
= \ & 2\eta|\overset{o}{\operatorname{Ric}}|^2, \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

onde

$$\eta = \frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{1+2(n-1)a}(1-\delta) - \frac{1-2b}{n}\delta.$$

Como

$$\frac{1}{1-\delta} = \frac{(n-2)b^2}{\delta},$$

teremos que

$$\begin{aligned}
\frac{1+2(n-1)a}{1-\delta}\eta &= n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b) \\
&\quad -(1+2(n-1)a)(n-2)b^2(1-2b) \\
&= n^2b^2 + (n-1)(1+(n-2)b^2)(2b-1)2a \\
&\quad +(1-2b)(2(n-1)b-(n-2)b^2) \\
&= n^2b^2 + (n-1)(2b-1)(2b+(n-2)b^2) \\
&\quad +(1-2b)(2(n-1)b-(n-2)b^2) \\
&= b^2(n^2 - n(n-2)(1-2b)) \\
&= 2b^2n(1+b(n-2)) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Isto significa que $\eta > 0$. Observando que $\overset{o}{\mathrm{Ric}}\,(v,v) = \delta - 1 < 0$, temos que $|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2 > 0$. Unindo estes fatos e os substituindo em (6.7), concluiremos que

$$\mathrm{Ric}(Q(R))(v,v) + \mathrm{Ric}(D_{a,b}(R))(v,v) > \frac{\delta}{n}\mathrm{scal}(Q(R)) + \frac{\delta}{n}\mathrm{scal}(D_{a,b}(R)).$$

□

Proposição 6.4. *Seja $C \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ um cone satizfazendo a condição $(*)$. Fixado $a \in (1/2, \infty)$, considere*

$$b = \frac{1}{2} \quad e \quad \delta = 1 - \frac{4}{n-2+8a}.$$

Então, o cone

$$C'(a) = \left\{\ell_{a,b}(R); R \in C \quad e \quad Ric(R) \geq \frac{\delta}{n} scal(R) \cdot id\right\}$$

é tranversalmente invariante pela E.D.O. de Hamilton $\frac{d}{dt}R = Q(R)$.

Demonstração.

Como esperado, a demonstração desta proposição seguirá os moldes da anterior. Pela Proposição 6.2, basta mostrarmos que o conjunto

$$C'(a) = \left\{R \in C; \mathrm{Ric}(R) \geq \frac{\delta}{n}\mathrm{scal}(R)\cdot \mathrm{id}\right\}$$

é tranversalmente invariante pela E.D.O. $\frac{d}{dt}R = Q(R) + D_{a,b}(R)$.

Para isto, considerearemos um tensor $R \in \partial\tilde{C}(a)/\{0\}$ tal que $\mathrm{Ric}(R) \geq \frac{\delta}{n}\mathrm{scal}\cdot\mathrm{id}$. Para completar a demonstração verificaremos as duas afirmações que se seguem:

(i) A soma $Q(R) + D_{a,b}(R)$ está no interior do cone tangente $T_R C$. Como feito antes, assumimos que scal $= n$ e escolhemos uma base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathrm{Ric}(e_i, e_j) = 0$, se $i \neq j$, $\overset{o}{\mathrm{Ric}}\,(e_i, e_i) = \lambda_i$ e $\mathrm{Ric}(e_i, e_i) = 1 + \lambda_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Além do mais, temos que $\lambda_i \geq \delta - 1$.

Se fixamos dois índices $i \neq j$, temos que $e_i \wedge e_j$ é um autovetor do operador de curvatura de $D_{a,b}(R)$ com autovalor associado σ_{ij}. Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sigma_{ij} &= ((n-2)b^2 - 2(a-b))\lambda_i\lambda_j \\
&\quad + 2a(\lambda_i + 1)(\lambda_j + 1) + b^2(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) \\
&\quad + \frac{nb^2(1-2b) - 2(a-b)(1-2b+nb^2)}{n(1+2(n-1)a)} |\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2 \\
&= \left(\frac{n+2}{4} - 2a\right)\lambda_i\lambda_j + 2a(\lambda_i + 1)(\lambda_j + 1) \\
&\quad + \frac{1}{4}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) - \frac{2a-1}{4(1+2(n-1)a)} |\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2,
\end{aligned}$$

pois $b = 1/2$. Note que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{n+2}{4} - 2a\right)\lambda_i\lambda_j + 2a(\lambda_i + 1)(\lambda_j + 1) \\
&= \frac{n+2}{4}\left(\lambda_i + \frac{4}{n+2}\right)\left(\lambda_j + \frac{4}{n+2}\right) - (\lambda_i + \lambda_j) + 2a(\lambda_i + 1)(\lambda_j + 1) \\
&= \frac{n+2}{4}\left(\lambda_i + \frac{4}{n+2}\right)\left(\lambda_j + \frac{4}{n+2}\right) + \frac{n-2}{n+2} - (2a-1) \\
&+ (2a-1)\left(\lambda_i + \lambda_j + \frac{8}{n-2+8a}\right) - \frac{8}{n-2+8a}(2a-1) \\
&= \frac{n+2}{4}\left(\lambda_i + \frac{4}{n+2}\right)\left(\lambda_j + \frac{4}{n+2}\right) + \frac{n-2}{n+2} \\
&+ (2a-1)\left(\frac{n-10+8a}{n-2+8a}\right) + (2a-1)(\lambda_i + \lambda_j + 2(1-\delta)).
\end{aligned}$$

pois $\delta = 1 - \frac{4}{n-2+8a}$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sigma_{ij} &= \frac{n+2}{4}\left(\lambda_i + \frac{4}{n+2}\right)\left(\lambda_j + \frac{4}{n+2}\right) + \frac{n-2}{n+2} \\
&\quad + (2a-1)\left(\frac{n-10+8a}{n-2+8a}\right) + (2a-1)(\lambda_i + \lambda_j + 2(1-\delta)) \\
&\quad + \frac{1}{4}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) - \frac{2a-1}{4(1+2(n-1)a)} |\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2.
\end{aligned}$$

Como

$$\lambda_i \geq \delta - 1 > -\frac{4}{n+2},$$

e $a > 1/2$, concluímos que

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij} > \frac{n-2}{n+2} + (2a-1)\left(\frac{n-10+8a}{n-2+8a}\right) - \frac{2a-1}{4(1+2(n-1)a)} |\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2. \tag{6.8}$$

Agora, lembrando que $\lambda_i \geq \delta - 1$, para todo $1 \leq i \leq n$, e

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \overset{o}{\mathrm{Ric}}\,(e_i, e_i) = \mathrm{tr}(\overset{o}{\mathrm{Ric}}) = 0,$$

vemos que

$$0 = \lambda_k + \sum_{i \neq k}^{n} \lambda_i \geq \lambda_k + (n-1)(\delta - 1),$$

de onde $\lambda_k \leq (1-\delta)(n-1)$, para todo $1 \leq k \leq n$. Como $\sum_i \lambda_i^2 = |\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2$, teremos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{k=1}^{n} [\lambda_k + (1-\delta)][(n-1)(1-\delta) - \lambda_k] \\
&= \sum_{k=1}^{n} [(n-1)(1-\delta)^2 - \lambda_k^2] + (n-2)(1-\delta) \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \\
&= n(n-1)(1-\delta)^2 - |\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2,
\end{aligned}$$

donde

$$|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2 \leq n(n-1)(1-\delta)^2.$$

Substituindo em (6.8), teremos

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij} \geq \frac{n-2}{n+2} + (2a-1)\left(\frac{n-10+8a}{n-2+8a}\right) - 4\frac{2a-1}{1+2(n-1)a} \cdot \frac{n(n-1)}{(n-2+8a)^2}.$$

Utilizando que $a > 1/2$ e $n \geq 4$, concluiremos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sigma_{ij}(n-2+8a) &\geq \frac{n-2}{n+2}(n-2+8a)+(2a-1)(n-10+8a)\\
&\quad -4\frac{2a-1}{1+2(n-1)a}\cdot\frac{n(n-1)}{n-2+8a}\\
&> \frac{n-2}{n+2}(n-2+8a)+(2a-1)(n-10+8a)\\
&\quad -4(2a-1)\frac{n-1}{n+2}\\
&= \frac{n-2}{n+2}(n-2+8a)+(2a-1)\left(n-2-\frac{4}{n+2}\right)\\
&\quad +(2a-1)\left[8(a-1)-\frac{4n}{n+2}+\frac{8}{n+2}\right]\\
&= (2a-1)\left(n-2-\frac{4}{n+2}\right)+8(2a-1)(a-1)+n-2\\
&= (2a-1)\left(n-2-\frac{4}{n+2}\right)+(4a+3)^2+(n-3)\\
&> 0.
\end{aligned}
$$

Daí, $\sigma_{ij} > 0$, para todos $1 \leq i, j \geq n$. Isto significa que $D_{a,b}(R)$ tem operador de curvatura positivo. Como C é um cone que satisfaz a condição $(*)$, segue que $D_{a,b}(R) \in C$. Assim, $D_{a,b}(R)$ pertence ao interior do cone tangente T_RC. Como $Q(R) \in T_RC$, segue que $Q(R) + D_{a,b}(R)$ está no interior do cone tangente T_RC.

(ii) Se $v \in \mathbb{R}^n$ é um vetor unitário tal que $\mathrm{Ric}(v,v) = \frac{\delta}{n}\mathrm{scal}\cdot\mathrm{id}$, então

$$\mathrm{Ric}(Q(R))(v,v) + \mathrm{Ric}(D_{a,b}(R))(v,v) > \frac{\delta}{n}\mathrm{scal}(Q(R)) + \frac{\delta}{n}\mathrm{scal}(D_{a,b}(R)).$$

Assumindo novamente que $\mathrm{scal} = n$ e considerando $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de autovetores de $\overset{o}{\mathrm{Ric}}$, procedemos da mesma forma que na demonstração do Lema anterior para ver que $|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2 > 0$ e

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}(Q(R))(v,v) + \mathrm{Ric}(D_{a,b}(R))(v,v) - \frac{\delta}{n}\mathrm{scal}(Q(R)) - \frac{\delta}{n}\mathrm{scal}(D_{a,b}(R))\\
&\geq -2(1-\delta)(\delta-2a+2b(1-\delta)) - \frac{2(1-2b)}{n}\delta|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2\\
&+2\frac{n^2b^2-2(n-1)(a-b)(1-2b)}{1+2(n-1)a}(1-\delta)|\overset{o}{\mathrm{Ric}}|^2.
\end{aligned}
$$

Como $a > 1/2$, $b = 1/2$ e $(1-\delta) > 0$, segue que

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Ric}(Q(R))(v,v) + \operatorname{Ric}(D_{a,b}(R))(v,v) - \frac{\delta}{n}\operatorname{scal}(Q(R)) - \frac{\delta}{n}\operatorname{scal}(D_{a,b}(R)) \\
&\geq 2(1-\delta)(2a-1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{1+2(n-1)a}(1-\delta)|\overset{o}{\operatorname{Ric}}|^2 \\
&> 0,
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

6.3 A demonstração do Teorema da Esfera Diferenciável

No que segue a esta seção, fixaremos um inteiro $n \geq 4$. Considere $\hat{C} \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ o cone introduzido na seção 5.3. Segue dos Corolários 5.1 e 5.2 e da Proposição 5.6 que $\hat{C}$ satisfaz a condição $(*)$.

Definição 6.3. *Para cada $s > 0$, definimos o cone $\hat{C}(s)$ por*

$$
\hat{C}(s) := \left\{ \ell_{a(s),b(s)}(R); R \in \hat{C} \quad e \quad Ric \geq \frac{\delta(s)}{n} scal \cdot id \right\},
$$

onde

$$
2a(s) = \begin{cases} \dfrac{2s+(n-2)s^2}{1+(n-2)s^2}, & se \quad 0 < s \leq \frac{1}{2} \\ 2s, & se \quad s > \frac{1}{2} \end{cases}
$$

$$
2b(s) = \begin{cases} 2s, & se \quad 0 < s \leq \frac{1}{2} \\ 1, & se \quad s > \frac{1}{2} \end{cases}
$$

$$
\delta(s) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{1+(n-2)s^2}, & se \quad 0 < s \leq \frac{1}{2} \\ 1 - \dfrac{4}{n-2+8s}, & se \quad s > \frac{1}{2} \end{cases}
$$

Note que as funções $a(s)$, $b(s)$ e $\delta(s)$ são contínuas em $(0,\infty)$. Além disso, para cada $s > 0$, $\hat{C}(s)$ é um cone fechado, convexo e $O(n)$-invariante. O tensor $I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ está no interior de $\hat{C}(s)$, para cada $s > 0$.

Proposição 6.5. *Para cada $s > 0$ o cone $\hat{C}(s)$ satisfaz as propriedades:*

(i) *Se $R \in \hat{C}(s)/\{0\}$, então $Q(R)$ está no interior do cone tangente $T_R\hat{C}(s)$;*

(ii) *Se $R \in \hat{C}(s)$ para algum $s > 1/2$, então R é fracamente $\frac{2s-1}{2s+n-1}$-pinçado.*

Demonstração.

(i) Como $\hat{C}$ satisfaz a condição $(*)$, se $s \leq 1/2$ a assertiva segue da Proposição 6.3 e se $s > 1/2$ a assertiva segue da Proposição 6.4.

(ii) Fixado $s > 1/2$, tome $S \in \hat{C}(s)$, isto é, $S = \ell_{s,1/2}(R)$ para algum $R \in \hat{C}$.

Como R tem curvatura seccional não-negativa, dado um conjunto ortonormal $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^n$ temos

$$\begin{aligned} 0 \leq 2R(e_1,e_2,e_1,e_2) &\leq \sum_{k=1}^{n}[R(e_1,e_k,e_1,e_k)+R(e_2,e_k,e_2,e_k)] \\ &= \mathrm{Ric}(e_1,e_1)+\mathrm{Ric}(e_2,e_2), \end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$0 \leq R(e_1,e_2,e_1,e_2) \leq \frac{1}{2}(\mathrm{Ric}(e_1,e_1)+\mathrm{Ric}(e_2,e_2)).$$

Utilizando a definição de $\ell_{a,b}(R)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \ell_{s,1/2}(R)(e_1,e_2,e_1,e_2) &= R(e_1,e_2,e_1,e_2)+\frac{1}{2}[\mathrm{Ric}(R)(e_1,e_1)+\mathrm{Ric}(R)(e_2,e_2)] \\ &\quad +\frac{2}{n}\left(s-\frac{1}{2}\right)\mathrm{scal}(R) \\ &\geq \frac{1}{n}(2s-1)\mathrm{scal}(R), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \ell_{s,1/2}(R)(e_1,e_2,e_1,e_2) &= R(e_1,e_2,e_1,e_2)+\frac{1}{2}[\mathrm{Ric}(R)(e_1,e_1)+\mathrm{Ric}(R)(e_2,e_2)] \\ &\quad +\frac{2}{n}\left(s-\frac{1}{2}\right)\mathrm{scal}(R) \\ &\leq \frac{1}{2}[\mathrm{Ric}(R)(e_1,e_1)+\mathrm{Ric}(R)(e_2,e_2)] \\ &\quad +\frac{1}{2}[\mathrm{Ric}(R)(e_1,e_1)+\mathrm{Ric}(R)(e_2,e_2)] \\ &\quad +\frac{1}{n}\,(2s-1)\,\mathrm{scal}(R) \\ &= \frac{2s-1+n}{n}\mathrm{scal}. \end{aligned}$$

Disto concluímos que o tensor $R = \ell_{s,1/2}(R)$ é fracamente $\frac{2s-1}{2s+n-1}$-pinçado.

$\square$

Lema 6.4. *Fixe um intervalo compacto $[\alpha, \beta] \in (0, \infty)$ e suponha que $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ é um conjunto fechado, invariante pela E.D.O. de Hamilton e satisfazendo*

$$F \subset \left\{ R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n); R + hI \in \hat{C}(s) \right\},$$

para algum $s \in [\alpha, \beta]$ e algum $h > 0$. Então existe um número real $\varepsilon > 0$ que depende apenas de α, β e n tal que o conjunto

$$\hat{F} = \left\{ R \in F; R + 2hI \in \hat{C}(s + \varepsilon) \right\}$$

é invariante pela E.D.O. de Hamilton e

$$\{R \in F; scal(R) \leq h\} \subset \hat{F}.$$

Demonstração. Se $R \in \hat{C}(s)/\{0\}$ para algum $s \in [\alpha, \beta + 1]$, segue da Proposição 6.4 que $Q(R)$ está no interior do cone tangente $T_R\hat{C}(s)$. Podemos achar uma constante $N \geq 1$ que depende apenas de α, β e n com a propriedade de que se $\mathrm{scal}(R) \geq N$ e $R \in \hat{C}(s)$ para algum $s \in [\alpha, \beta + 1]$, então $Q(R)$ está no interior de $T_R\hat{C}(s)$.

Como os cones $\hat{C}(s)$ variam continuamente em s, podemos achar um número real $\varepsilon \in (0, 1]$ dependendo apenas de α, β e n, tal que

$$\left\{ R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n); R + I \in \hat{C}(s) \ \text{ e } \ \mathrm{scal}(R) \leq N \right\} \subset \left\{ R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n); R + 2I \in \hat{C}, (s + \varepsilon) \right\} \tag{6.9}$$

para todo $s \in [\alpha, \beta]$.

Provaremos que este ε satisfaz a propriedade almejada pelo Lema. Sem perda de generalidade, vamos supor que $h = 1$. Considere $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ um conjunto fechado e invariante pela E.D.O. de Hamilton satisfazendo

$$F \subset \left\{ R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n); R + I \in \hat{C}(s) \right\}, \tag{6.10}$$

para algum $s \in [\alpha, \beta]$. Defina o conjunto $\hat{F} \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ por

$$\hat{F} := \left\{ R \in F; R + 2I \in \hat{C}(s + \varepsilon) \right\}.$$

De (6.9) e (6.10), concluímos que

$$\{R \in F; \mathrm{scal}(R) \leq N\} \subset \hat{F}. \tag{6.11}$$

Feito isto, basta mostrarmos que $\hat{F}$ é invariante pela E.D.O. de Hamilton. Para isto, considere $R(t)$, $t \in [0, T)$, como sendo uma solução da E.D.O. de Hamilton com $R(0) \in \hat{F} \subset F$. Como F é invariante pela E.D.O. de Hamilton, já temos que $R(t) \in F$, $\forall t \in [0, T)$. No que se segue iremos provar que $R(t) + 2I \in \hat{C}(s + \varepsilon)$, $\forall t \in [0, T)$, de onde conluiremos a prova. Isto será feito argumentando por absurdo.

Supondo que o conjunto $\left\{t \in (0,T); R(t) + 2I \notin \hat{C}(s+\varepsilon)\right\}$ é não vazio, poderíamos considerar

$$t_0 = \inf\left\{t \in (0,T); R(t) + 2I \notin \hat{C}(s+\varepsilon)\right\}.$$

Claramente, $R(t_0) + 2I \in \hat{C}(s+\varepsilon)$. Temos duas possibilidades:

(1) $\mathrm{scal}(R(t_0)) \geq N$. Segue da nossa escolha de N que $Q(R(t_0))$ está no interior do cone tangente $T_{R(t_0+I)}\hat{C}(s+\varepsilon)$. Segue do item **(ii)** da Proposição 4.1 que existe $t_1 \in (t_0, T)$ tal que $R(t) + 2I \in \hat{C}(s+\varepsilon)$, $\forall t \in [0, t_1]$. Isto contradiz a definição de t_0.

(2) $\mathrm{scal}(R(t_0)) < N$. Por continuidade, existe $t_2 \in (0,T)$ tal que $\mathrm{scal}(R(t)) \leq N$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. Segue de (6.11) que $R(t) + 2I \in \hat{C}(s+\varepsilon)$, $\forall t \in [t_0, t_1]$, o que contradiz a definição de t_0.

□

Proposição 6.6. *Considere $K \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ um subconjunto compacto. Além disso considere $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ o menor subconjunto contendo K que é fechado, convexo, $O(n)$-invariante e invariante pela E.D.O. de Hamilton. Se existem constantes $s_0 > 0$ e $h_0 > 0$ tais que*

$$F \subset \left\{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n); R + h_0 I \in \hat{C}(s_0)\right\},$$

então F é um conjunto pinçante.

Demonstração. Considere $\mathscr{S}$ como sendo o conjunto dos números reais $s > 0$ tais que

$$F \subset \left\{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n); R + hI \in \hat{C}(s)\right\},$$

para algum $h > 0$. Por hipótese temos que $s_0 \in \mathscr{S}$, donde $\mathscr{S} \neq \emptyset$. Considere σ como sendo o supremo dos elementos de $\mathscr{S}$ e $(s_j) \in \mathscr{S}$ uma sequência tal que $s_j \to \sigma$. Desta forma, para cada j existe um número real $h_j > 0$ tal que

$$F \subset \left\{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n); R + h_j I \in \hat{C}(s_j)\right\}.$$

Após um rescalonamento da métrica, se necessário, podemos supor que

$$h_j \geq \sup\left\{\mathrm{scal}(R); R \in K\right\}, \tag{6.12}$$

para todo j.

Afirmamos que $\sigma = \infty$. De fato se a sequência (s_j) estivesse contida num subintervalo compacto de $(0,\infty)$, seguiria do Lema 6.4 que, para cada j, existiria um $\varepsilon > 0$ tal que o conjunto

$$\hat{F}_j = \left\{R \in F; R + 2h_j I \in \hat{C}(s_j+\varepsilon)\right\},$$

é invariante pela E.D.O. de Hamilton e

$$\{R \in F; \mathrm{scal}(R) \leq h_j\} \subset \hat{F}_j. \tag{6.13}$$

Segue de (6.12) e (6.13) que $K \subset \hat{F}_j$, para cada j. Como os conjuntos $\hat{F}_j$ são fechados, convexos, $O(n)$-invariantes e invariantes pela E.D.O. de Hamilton, segue da hipótese da Proposição que $F \subset \hat{F}_j$, para cada j. Isto implica que $s_j + \varepsilon \in \mathscr{S}$, para todo j. E, como ε é independente de j, podemos considerar j suficientemente grande de forma que $s_j + \varepsilon > \sigma$. Isto contradiz a definição de σ.

Portanto, $\lim s_j = \sigma = \infty$. Utilizando a Proposição 6.5 concluiremos que F é um conjunto pinçante.

$\square$

Corolário 6.1. *Considere $K \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ um subconjunto compacto que está contido no interior do cone $\hat{C}$. Então existe um conjunto pinçante $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ tal que $K \subset F$.*

Demonstração. Considere F como sendo o menor conjunto contendo K que é fechado, convexo, $O(n)$-invariante e invariante pela E.D.O. de Hamilton. Como K está contido no interior de $\hat{C}$, podemos encontrar um número real $s_0 > 0$ tal que $K \subset \hat{C}(s_0)$. Como $\hat{C}(s_0)$ é um conjunto fechado, convexo, $O(n)$-invariante e invariante pela E.D.O. de Hamilton, segue que $F \subset \hat{C}(s_0)$. Segue da Proposição 6.6 que F é um conjunto pinçante

$\square$

O Teorema que segue nos dá uma condição sobre o tensor curvatura de uma variedade para que esta seja difeomorfa a uma forma espacial esférica.

Teorema 6.1 (S. Brendle, R. Schöen, [7])**.** *Considere M uma variedade compacta de dimensão $n \geq 4$ e g_0 uma métrica riemanniana em M. Assuma que o tensor de curvatura R_{g_0} está no interior do cone $\hat{C}$ para todos os pontos $p \in M$. Seja $g(t)$, $t \in [0, T)$, a única solução do fluxo de Ricci com métrica inicial g_0. Então, quando $t \to T$, a métricas rescalonadas $\frac{1}{2(n-1)(T-t)}$ convergem em C^∞ para uma métrica de curvatura seccional constante igual a 1.*

Demonstração. Pelo Corolário 6.1 existe um conjunto pinçante $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ tal que $R_{g_0} \in F$, $\forall p \in M$. Utilizando o Teorema 4.2 chegamos ao resultado desejado.

$\square$

Para concluir o Teorema da Esfera Diferenciável, devemos mostrar que o interior do cone $\hat{C}$ contém todos os tensores de curvatura estritamente $1/4$-pinçados no sentido pontual:

Proposição 6.7. *Considere (M, g) como sendo uma variedade riemanniana de dimensão $n \geq 4$. Então*

(i) *Se (M, g) é fracamente $1/4$-pinçada no sentido pontual, então o tensor de curvatura de (M, g) está no cone $\hat{C}$, para todos os pontos $p \in M$.*

(i) *Se (M, g) é estritamente $1/4$-pinçada no sentido pontual, então o tensor de curvatura de (M, g) está no interior do cone $\hat{C}$, para todos os pontos $p \in M$.*

Demonstração. Se M é fracamente $1/4$-pinçada segue que $0 \leq K_{max}(p) \leq 4K_{min}(p)$. Usando o Lema de Berger (cf. Lema 1.1), temos que

$$R(e_1, e_2, e_3, e_4) \leq \frac{2}{3}(K_{max}(p) - K_{min}(p)) \leq 2K_{min},$$

para todos conjuntos ortonormais $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset T_pM$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
& R(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
& +\mu^2 R(e_2, e_3, e_2, e_3) + \mu^2\lambda^2 R(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
& -2\lambda\mu R(e_1, e_2, e_3, e_4) \\
& \geq (1 + \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2\mu^2 - 4\lambda\mu)K_{min}(p) \\
& = ((1 - \lambda\mu)^2 + (\lambda - \mu)^2)K_{min}(p) \\
\geq \; & 0,
\end{aligned}$$

para todos conjuntos ortonormais $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset T_pM$ e todos $\lambda, \mu \in [0, 1]$. Segue da Proposição 5.5 que (M, g) pertence ao cone $\hat{C}$, para todos $p \in M$. O mesmo se aplica ao caso onde (M, g) é estritamente $1/4$-pinçada.

$\square$

Unindo a Proposição 6.7 com o Teorema 6.1, concluímos o aclamado Teorema da Esfera Diferenciável:

Teorema 6.2 (S. Brendle, R. Schöen, [7])**.** *Considere M uma variedade compacta de dimensão $n \geq 4$ e g_0 uma métrica riemanniana em M. Assuma que (M, g_0) é fracamente $1/4$-pinçada. Seja $g(t)$, $t \in [0, T)$, a única solução do fluxo de Ricci com métrica inicial g_0. Então, quando $t \to T$, a métricas rescalonadas $\frac{1}{2(n-1)(T-t)}$ convergem em C^∞ para uma métrica de curvatura seccional constante igual a 1.*

Referências Bibliográficas

[1] AIEX, N. *O fluxo de Ricci em dimensão 3*, Dissertação de Mestrado, UFRJ, Rio de Janeiro (2011)

[2] ANDREWS, B., and HOPPER,C., *The Ricci Flow in Riemannian Geometry: A complete proof of the Diferentiable 1/4-Pinching Sphere Theorem*, Lectures Notes in Mathematics 2011, Springer (2010)

[3] BERGER, M., *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer-Verlag, Berlim (2003)

[4] BERGER, M., *Les variétés Riemanniennes 1/4 pincées*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Serie III, 14, pg. 161-170 (1960)

[5] BÖHM, C. and WILKING, B., *Manifolds with positive curvature operator are space forms*, Ann. of Math. (2) 167, pg. 1079-1097 (2008)

[6] BRENDLE, S. *Ricci flow and the sphere theorem.* American Mathematical Society, (2010)

[7] BRENDLE, S. and SCHOEN,R., *Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms*, J. Amer. Math. Soc. 22, pg. 287-307(2009)

[8] BRENDLE, S. and SCHOEN,R., *Sphere theorems in geometry*, Surveys in Differential Geometry, vol XII, pg. 49-84, International Press, Somerville MA (2009)

[9] BRENDLE, S. and SCHOEN,R., *Curvature, sphere theorems, and the Ricci flow*, Bulletin of the American Mathematical Society 48, 1?32 (2011)

[10] CHAVEL, I. *Riemannian geometry - a modern introduction.* Second Edition. Cambridge Studies in advanced Mathematics, 98, Cambridge University Press, Cambridge (2006)

[11] CHEEGER J., and EBIN, D., *Comparison theorems in Riemannian geometry.* North Holland Publishing Company, Amsterdam, (1975)

[12] CHOW, B., LU, P., NI, L., *Hamilton's Ricci flow.* American Mathematical Society, (2007)

[13] DETURCK, D., *Deforming metrics in the direction of their Ricci tensor*, J. Diff. Geom. 18, pg. 157-162 (1983)

[14] EELLS JR., J. and SAMPSON, J. H., *Harmonic maps of Riemannian Manifolds*, Amer. J. Math. 86, pg. 507-522 (1964)

[15] GROMOLL, D., *Differenzierbare Strukturen und Metriken positiver Krümmung auf Sphären*, Math.Ann. 164,pg. 353-371 (1966)

[16] GROVE, K., KARCHER, H., and RUH, E., *Jacobi fields and Finsler metrics on compact Lie groups with a application to differentiable pinching problems*, Math.Ann. 211,pg. 7-21 (1974)

[17] HAMILTON, R., *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J.Diff.Geom. 17, pg. 255-306 (1982)

[18] HAMILTON, R., *Four-manifolds with positive curvature operator*, J.Diff.Geom. 24, pg. 153-179 (1986)

[19] HAMILTON, R., *The Ricci flow on surfaces*, Contemp. Math. 71, pg. 237-262, Amer. Math. Soc., Providence RI (1988)

[20] KARCHER, H., SUGIMOTO, M. and SHIOHAMA, K., *On the differentiable pinching problem*, Math. Ann. 195, 1-16 (1971)

[21] KLIGENBERG, W., *Über Riemannshe Mannigfaltigkeitem mit positiver Krümmung*, Comment. Math. Helv. 35, pg. 47-54 (1961)

[22] LEE, J., *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics 176, Springer-Verlag (1997)

[23] MARQUES, F. C., *Uma Introdução ao Fluxo de Ricci*. XVI Escola de Geometria Diferencial, USP(2010)

[24] MICALLEF, M., and MOORE, J. D., *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*, Ann. of Math. (2) 127, 199-227 (1988)

[25] MILNOR, J., *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. (2) 64, 399-405 (1956)

[26] NGUYEN, H., *Isotropic curvature and the Ricci flow*, Internat. Math. Res. Notices no. 3, 536-558 (2010)

[27] O'NEILL, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, New York-London (1983)

[28] PETERSEN, P., *Riemannian Geometry*. Second Edition. Graduate Texts in Mathematics 171, Springer-Verlag (2006)

[29] RAUCH, H. E., *A contribution to differential geometry in the large*, Ann. of Math. (2) 54, pg. 38-55 (1951)

[30] RUH, E., *Krümmung und differenzierbare Struktur auf Sphären II*, Math.Ann. 205, pg. 113-129 (1973)

[31] RUH, E., *Riemannian manifolds with bounded curvature ratios*, J.Diff.Geom. 17, pg. 643-653 (1982)

[32] SAKAI, T., *Riemannian Geometry*, Translations of Mathematical Monographs Series 149, American Mathematical Society (1996)

[33] SHI, W. X., *Deforming the metric on complete Riemannian manifolds*, J.Diff.Geom. 30,pg. 223-301 (1989)

[34] TAYLOR, M., *Partial Differential Equations, Vol.III: Nonlinear Equations*, Applied Mathematical Sciences 117, Springer-Verlag (1996)

[35] TOPPING, P., *Lectures on the Ricci Flow*. London Mathematical Society. Lecture Note Series 325, Cambridge University Press (2006)